Lösungen der Aufgaben 2026

Aufgabe 1

a)

a1) Lösung: $[4]_{13}$
Herleitung:

$$[7]_{13} + [10]_{13} = [17]_{13} = [4]_{13}$$

a2) Lösung: $[6]_{12}$
Herleitung:

$$[5]_{12} \cdot [6]_{12} = [30]_{12} = [6]_{12}$$

a3) Lösung: $[11]_{13}$
Herleitung:
Offensichtlich ist $[2]_{13} \cdot [6]_{13} = [12]_{13} = [-1]_{13}$.
Also ist $[-2]_{13} \cdot [6]_{13} = [-(-1)]_{13} = [1]_{13}$.
Deshalb ist $[-2]_{13} = [11]_{13} = [6]_{13}^{-1}$.

Oder ausprobieren.

Oder den euklidschen Algorithmus gemäß des Beweises im Skript zurückrechnen.

a4) Lösung: $[1]_{13}$
Herleitung:

$$[12]_{13}^8 = [-1]_{13}^8 = [(-1)^8]_{13} = [1]_{13}$$

Oder dreimal quadrieren.

Oder Schritt für Schritt multiplizieren.

Oder tatsächlich 12^8 modulo 13 reduzieren.

a5) Lösung: $[3]_7$
Herleitung:
Es ist $[3]_7^6 = [729]_7 = [1]_7$. Damit:

$$[3]_7^{1027} = [3]_7^{1026} \cdot [3]_7 = \left([3]_7^6\right)^{171} \cdot [3]_7 = [1]_7^{171} \cdot [3]_7 = [1]_7 \cdot [3]_7 = [3]_7$$

Ausprobieren kleiner Potenzen, die der TR exakt angibt, zeigt auch, dass sich die Ergebnisse zyklisch wiederholen; auch daraus folgt das Resultat.

b)

b1) Lösung: $[13]_{14}$
Herleitung:

$$[2]_{14} + [x]_{14} = [1]_{14} \iff [x]_{14} = [1]_{14} - [2]_{14} = [-1]_{14} = [13]_{14}$$

b2) Lösung: $[9]_{11}$
Herleitung:

$$[x]_{11} \cdot [3]_{11} = [5]_{11} \iff [x]_{11} = [5]_{11} \cdot [3]_{11}^{-1} = [5]_{11} \cdot [4]_{11} = [9]_{11}$$

b3) Lösung: —
Herleitung:

$$[4]_{18} \cdot [x]_{18} = [11]_{18} \iff 4x - 11 = k \cdot 18$$

Links steht eine ungerade, rechts eine gerade Zahl: Widerspruch!

b4) Lösung: $[3]_{18}$; $[12]_{18}$
Herleitung:

$$[x]_{18} \cdot [2]_{18} = [6]_{18} \iff 2x - 6 = 18k \iff x - 3 = 9k$$

Da uns nur generische Repräsentanten interessieren, kann man für k nur 0 und 1 einsetzen, das liefert die obigen Lösungen.

b5) Lösung: $[2]_9$; $[7]_9$

Herleitung: geht am besten durch Ausprobieren (oder mit viel Algebra).

b6) Lösung: —

Herleitung: auch das am besten durch Ausprobieren; auch in $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sind manche Zahlen Quadrate, andere nicht.

b7) Lösung: $[0]_{25}$; $[5]_{25}$; $[10]_{25}$; $[15]_{25}$; $[20]_{25}$

Herleitung:

$$[x]_{25}^2 = [0]_{25} \iff x^2 = 25k$$

Daraus folgt sofort, dass x durch 5 teilbar sein muss. Andererseits gibt $(5y)^2 = 25y^2$ eine durch 25 teilbare Zahl, sodass jede Zahl der Form $5y$, die größergleich 0 und kleiner als 25 ist, auch tatsächlich eine Lösung darstellt.

b8) Lösung: $[0]_5$; $[1]_5$; $[2]_5$; $[3]_5$; $[4]_5$

Herleitung: Ausprobieren (oder GK Algebra)

c) c1) Lösung: $n = 2$

Herleitung:

$$[57]_n = [-29]_n \iff [57+29]_n = [86]_n = [0]_n$$

Also muss n ein Teiler von 86 sein, also (1), 2, 43 oder 86. Der kleinste Teiler größer als 1 ist 2.

c2) Lösung: $n = 3^8 = 6561$

Herleitung:

$$[3]_n^8 = [0]_n \iff [3^8]_n = [0]_n \iff n|3^8$$

Also kann n nur eine Dreierpotenz kleinergleich 3^8 sein. Wäre die Potenz kleiner als 8, wäre 3^7 ein Teiler von n, also $[3^7]_n = [0]_n$, im Widerspruch zur Voraussetzung des Aufgabe. Also bleibt nur $n = 3^8$.

c3) Lösung: $n = 5$

Herleitung:

$$[7]_n^{-1} = [8]_n \iff [7]_n \cdot [8]_n = [1]_n \iff [56]_n = [1]_n \iff [55]_n = [0]_n$$

Also muss n ein Teiler von 55 sein, mithin (1); 5; 11; 55, der kleinste zulässige ist 5.

d) Lösung: letzte Ziffer: 3, erste Ziffer: 1, Anzahl der Ziffern: 189

Herleitung:

Die letzte Ziffer ist natürlich der 10er-Rest der Zahl.

$$[13]_{10}^{169} = [3]_{10}^{169} = \left([3]_{10}^{13}\right)^{13} = [3]_{10}^{13} = [3]_{10}$$

3^{13} packt der WTR ohne Probleme exakt.

Wir berechnen statt 13^{169} die Zahl $1,3^{169} \approx 1,805 \cdot 10^{19}$.
Also ist die erste Ziffer 1, und 13^{169} hat dieselbe Ziffernfolge.

$$13^{169} = (1,3 \cdot 10)^{169} = 1,3^{169} \cdot 10^{169} \approx 1,805 \cdot 10^{19} \cdot 10^{169} = 1,805 \cdot 10^{188}$$

Und 10^{188} hat 189 Ziffern.

Aufgabe 2

a) Lösung: 130

Herleitung:

Der Datensatz hat zwei Werte (mit ggT 1), also ist der Schwellenwert $(n-1)(m-1) = 10 \cdot 13 = 130$.

b) Lösung: 465

Herleitung:

Wir haben Daten vom Typ $\{n;\ n+1;\ n+2\}$, genauer: $i = 2,\ k = 15,\ t = 1 (= i-1)$.
Also müssen wir die Formel $ik^2 + (i(i-2) + i - 1)k + (i-1)(i-2)$ verwenden, diese liefert

$$s = 2 \cdot 15^2 + (2 \cdot 0 + 2 - 1) \cdot 15 + (2-1) \cdot (2-2) = 465$$

c) Lösung: 512

Herleitung:

Wir haben Daten vom Typ $\{n;\ n+1;\ n+2\}$, genauer: $i = 2;\ k = 16;\ t = 0$.
Also müssen wir die Formel $ik^2 + (i(i-2) + t)k + t(i-3)$ verwenden.

$$s = 2 \cdot 16^2 + (2 \cdot 0 + 0) \cdot 16 + (2-3) \cdot 0 = 512$$

d) Lösung: 140

Herleitung:

Wir haben Daten vom Typ $\{n;\ n+1;\ n+2\}$, genauer: $i = 4;\ k = 5;\ t = 0$.
Also müssen wir die Formel $ik^2 + (i(i-2) + t)k + t(i-3)$ verwenden.

$$4 \cdot 5^2 + (4 \cdot 2 + 0) \cdot 4 + (4-3) \cdot 0 = 140$$

e) Lösung: 146

Herleitung:

Wir haben Daten vom Typ $\{n;\ n+1;\ n+5\}$, genauer: $i = 5;\ k = 4;\ t = 1$.
Also müssen wir die Formel $ik^2 + (i(i-2) + t)k + t(i-3)$ verwenden.

$$s = 5 \cdot 4^2 + (5 \cdot 3 + 1) \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 146$$

f) Lösung: 1904

Herleitung:

Wir haben Daten vom Typ $\{n;\ n+2;\ n+7\}$, genauer: $i = 7;\ k = 14;\ t = 2$.
Also müssen wir die Formel $ik^2 + (i(i-2) + t)k + t(i-3) + i - 1$ verwenden.

$$s = 7 \cdot 14^2 + (7 \cdot 5 + 2) \cdot k + 2 \cdot 4 + 6 = 1904$$

g) Lösung: 1940

Herleitung:

Wir haben Daten vom Typ $\{n;\ n+2;\ n+7\}$, genauer: $i = 7;\ k = 14;\ t = 4$.
Also müssen wir die Formel $ik^2 + (i(i-2) + t)k + t(i-3)$ verwenden.

$$s = 7 \cdot 14^2 + (7 \cdot 5 + 4) + 4 \cdot 4 + 6 = 1940$$

h) Lösung: 1963

Herleitung:

Wir haben Daten vom Typ $\{n;\ n+2;\ n+7\}$, genauer: $i = 7;\ k = 14;\ t = 5 (= i - 2)$.
Also müssen wir die Formel $ik^2 + (i^2 - i - 2)k + i^2 - 3i + 3$ verwenden.

$$s = 7 \cdot 14^2 + (49 - 7 - 2) \cdot 14 + 49 - 21 + 3 = 1963$$

i) Lösung: 2012

Herleitung:

Wir haben Daten vom Typ $\{n;\ n+2;\ n+7\}$, genauer: $i = 7;\ k = 15;\ t = 1$.
Also müssen wir die Formel $ik^2 + (i(i-3) + t)k + t(i-4) - 1$ verwenden.

$$s = 7 \cdot 15^2 + (7 \cdot 4 + 1) \cdot 15 + 1 \cdot 3 - 1 = 2012$$

j) Lösung: 420

Herleitung:

Wir haben Daten vom Typ $\{n;\ n+1,\ n+2;\ n+3\}$, genauer: $k = 11;\ t = 2$.
Also müssen wir die Formel $3k^2 + 5k + 2$ verwenden.

$$3 \cdot 11^2 + 5 \cdot 11 + 2 = 420$$

k) Lösung: —

Herleitung:

Alle drei Zahlen sind gerade, damit kann keine ungerade Zahl als ganzzahlige Linearkombination der drei Zahlen auftreten, also kann es keinen Schwellenwert geben.

l) Lösung: 1224

Herleitung:

Wir haben Daten vom Typ $\{2k+1;\ 2k+3;\ 2k+5\}$, genauer: $k = 24$.
Also müssen wir die Formel $2k^2 + 3k$ verwenden.

$$2 \cdot 24^2 + 3 \cdot 24 = 1224$$

m) Lösung: 32

Herleitung:

Wir haben Daten vom Typ $\{n;\ n+2;\ n+15\}$, genauer: $i = 15;\ k = 0;\ t = 6$.
Der kleine Wert für k lässt schon erwarten, dass hier ein Kleinheitsunfall vorliegt (die Formel würde 86 liefern). Wir müssen also ad hoc vorgehen.

31 ist nicht als ganzzahlige nichtnegative Linearkombination aus dem Datensatz zu erzielen, denn da 31 ungerade ist, müssen wir die 21 verwenden, verbleibt eine Restsumme von 10, die aus 6 und 8 nicht zu erhalten ist.

Ansonsten gilt

$$32 = 4 \cdot 8 \qquad 33 = 21 + 2 \cdot 6 \qquad 34 = 2 \cdot 8 + 3 \cdot 6$$

$$35 = 21 + 8 + 6 \qquad 36 = 6 \cdot 6 \qquad 37 = 21 + 2 \cdot 8$$

Also gehen ab 32 sechs aufeinanderfolgende Werte und damit alle weiteren.

n) Lösung: 59

Herleitung:

Der kleinste Abstand zweier Werte ist 3, dafür haben wir bislang keine Formel, es bleibt also nur, erneut ad hoc vorzugehen.

Die Zahl 58 geht nicht. Wir brauchen eine Summe mit Endziffer 8. Die 10 verändert die Endziffer nicht. Wenn wir keine 17 verwenden, brauchen wir 6 (oder 16; ...) 13er, das gibt mindestens 78.
Wenn wir eine 17 verwenden, brauchen wir 7 (oder 17; ...) 13er, das gibt mindestens 108.
Wenn wir 2 17er verwenden, brauchen wir 8 (oder 18; ...) 13er, das gibt mindestens 138.
Wenn wir 3 17er verwenden, brauchen wir 9 (oder 19; ...) 13er, das gibt mindestens 168.
Wenn wir 4 (oder mehr) 17er verwenden, gibt das mindestens 68.

Weiterhin gilt:

$$59 = 3 \cdot 13 + 10 \qquad 60 = 6 \cdot 10 \qquad 61 = 3 \cdot 17 + 10 \qquad 62 = 4 \cdot 13 + 10$$

$$63 = 13 + 5 \cdot 10 \qquad 64 = 2 \cdot 17 + 3 \cdot 10 \qquad 65 = 5 \cdot 13$$

$$66 = 2 \cdot 13 + 4 \cdot 10 \qquad 67 = 1 \cdot 17 + 5 \cdot 10 \qquad 68 = 4 \cdot 17$$

Damit gehen 59 bis 68 und damit alle weiteren auch.

o) Lösung: 1304

Herleitung: Ein möglicher Schlüssel, diese Aufgabe zu lösen, besteht in dem selbstverständlichen Ansatz

$$x = a \cdot 100 + b \cdot 102 + c \cdot 105 + d \cdot 109$$

und der Beobachtung, dass man, wenn man eine Zahl mit einem vorgegebenen Hunderter-Rest erzeugen kann, dass man ab dieser alle Zahlen mit dem entsprechenden Hunderter-Rest erzeugen kann. Und dieser Rest wird ganz allein von den Resten 2, 5 und 9 erzeugt. Die Frage ist lediglich, wie viele Summanden man dazu mindestens benötigt, da ja jeder solche Summand zusätzlich 100 zu der Summe beiträgt. Auf diese Weise bestimmt man für jeden Hunderter-Rest das kleinste x mit diesem Rest, das sich erzeugen lässt. Erfreulicherweise können wir den Löwenanteil dieser Hunderter-Reste via einer Abschätzung so gut wie übergehen, denn uns interessiert ja nur das größte nicht realisierbare Resultat, ab diesem sind alle erzeugbar.
Gehen wir in medias res:

Der Rest 0 ist ganz ohne 2, 5 und 9 erzeugbar.
Rest 1: $11 \cdot 9 + 1 \cdot 2$
Rest 2: $1 \cdot 2$
Rest 3: $11 \cdot 9 + 2 \cdot 2$
Rest 4: $11 \cdot 9 + 1 \cdot 5$
Rest 5: $1 \cdot 5$
Rest 6: $3 \cdot 2$
Rest 7: $1 \cdot 5 + 1 \cdot 2$
Rest 8: $12 \cdot 9$

Man überzeugt sich leicht davon, dass das tatsächlich jeweils die minimale Anzahl der entsprechenden Summanden ist. Kritisch ist ganz eindeutig der Rest 3, denn dazu sind 13 Summanden nötig, die Zahl 1303 ist also nicht erzeugbar, 1403 schon. Für den Rest 1 ist 1301 nicht erzeugbar, für den Rest 4 ist 1304 als erstes erzeugbar, für den Rest 8 1308; für diese Reste ist also 1303 die größte nicht erzeugbare Zahl.
Machen wir weiter:

Rest 9: $1 \cdot 9$
Rest 10: $2 \cdot 5$
Rest 11: $1 \cdot 9 + 1 \cdot 2$
Rest 12: $2 \cdot 5 + 1 \cdot 2$

Rest 13: $1 \cdot 9 + 2 \cdot 2$
Rest 14: $1 \cdot 9 + 1 \cdot 5$
Rest 15: $3 \cdot 5$
Rest 16: $1 \cdot 9 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 2$
Rest 17: $3 \cdot 5 + 1 \cdot 2$
Man sieht, dass die Maximalzahl an Summanden 4 ist, alle nicht erzeugbaren Zahlen mit diesen Resten liegen also vor der Zahl 400.

Für $18 - 26$ braucht man höchstens 5 Summanden, für $27 - 35$ höchstens 6, und so weiter, für $81 - 89$ schließlich braucht man höchstens 12 Summanden, für alle diese Reste liegt also die letzte nicht erzeugbare Zahl vor der Zahl 1200. Für $90 - 98$ benötigt man höchstens 13 Summanden, und da sich hier, anders als $1 - 8$, kein Hunderter-Übertrag ergibt, liegen die *nicht* erzeugbaren Zahlen auch mit diesen Resten *vor* der Zahl 1300. Bleibt der Rest 99, aber wegen $99 = 11 \cdot 9$ geht das sogar mit 11 Summanden, also ist die letzte nicht erzeugbare Zahl mit diesem Rest 1099.

Wir haben nun eingesehen, dass 1303 tatsächlich die größte nicht erzeugbare Zahl und 1304 der korrekte Schwellenwert ist.

Aufgabe 3

a) Lösung:

$$t=0:\quad 5k^2+15k+8 \qquad t=1:\quad 5k^2+11k+10 \qquad t=2:\quad 5k^2+17k+14$$

$$t=3:\quad 5k^2+18k+14 \qquad t=4:\quad 5k^2+19k+20$$

Herleitung:

Man beschafft sich für jede Restklasse modulo 5 mindestens 3 Schwellenwerte (und vertraut von vornherein darauf, dass sich stets ein quadratischer Term ergibt; will man dieses Vertrauen mathematisch absichern, bleibt einem nichts übrig, als die erhaltenen Formeln wie in der Vorlesung zu beweisen...). Aus diesen findet man die Formel entweder mit einem LGS, indem man für die Formel ak^2+bk+c ansetzt, die entsprechenden k einsetzt und auf die rechte Seite die bekannten Schwellenwerte einsetzt, die Lösung des LGS liefert dann die Koeffizienten a, b und c, oder — dann müssen die drei Werte zu aufeinander folgenden k-Werten sein — man verwendet die in der Vorlesung verwendete Methode, aus geeigneten Differenzfolgen die Koeffizienten zu eruieren.

Wir werden hier beide Verfahren an einer Restklasse vorführen, ansonsten aber Speicherplatz und/oder Papier sparen.
Zuerst geben wir aber einen ausreichenden Datensatz von Schwellenwerten an — wenn man noch nichts weiß, muss man diese per Ausprobieren finden (wobei der Autor gesteht, dass er ein PASCAL-Programm (ziemlich simpler Natur) hat ausprobieren lassen).

$$n=15: s=98 \qquad n=16: s=88 \qquad n=17: s=110 \qquad n=18: s=113 \qquad n=19: s=122$$

$$n=20: s=148 \qquad n=21: s=134 \qquad n=22: s=162 \qquad n=23: s=166 \qquad n=24: s=176$$

$$n=25: s=208 \qquad n=26: s=190 \qquad n=27: s=224 \qquad n=28: s=229 \qquad n=29: s=240$$

Formel für $t=0$ (also für durch 5 teilbare n) via LGS:
$n=15$ entspricht $k=3$, weil wir uns ja $n=3k+t$ denken müssen, damit entspricht $n=20$ $k=4$ und $n=25$ entspricht $k=5$. Somit lautet unser Ansatz:

$$\begin{array}{rcrcrcr} a\cdot 3^2 & + & b\cdot 3 & + & c\cdot 1 & = & 98 \\ a\cdot 4^2 & + & b\cdot 4 & + & c\cdot 1 & = & 148 \\ a\cdot 5^2 & + & b\cdot 5 & + & c\cdot 1 & = & 208 \end{array} \iff \begin{array}{rcrcrcr} 9a & + & 3b & + & c & = & 98 \\ 16a & + & 4b & + & c & = & 148 \\ 25a & + & 5b & + & c & = & 208 \end{array}$$

Wir eliminieren, aber ausnahmsweise spaltenweise von hinten her:

$$\iff \begin{array}{rcrcrcr} 9a & + & 3b & + & c & = & 98 \\ 7a & + & b & & & = & 50 \\ 16a & + & 2b & & & = & 110 \end{array} \iff \begin{array}{rcrcrcr} 9a & + & 3b & + & c & = & 98 \\ 7a & + & b & & & = & 50 \\ 2a & & & & & = & 10 \end{array}$$

Wir erhalten $a=5$, damit $b=15$ und damit $c=8$ und damit das oben angegebene Resultat.

Formel für $t=1$ via Differenzmethode:
Zunächst bilden wir die zweite Differenz'folge' aus den drei Daten:

$$\begin{array}{ccccc} 88 & & 134 & & 190 \\ & 46 & & 56 & \\ & & 10 & & \end{array}$$

Da man für den k^2-Koeffizienten die konstante (sieht man nur mit mehr Daten) 2. Differenzfolge durch 2! teilen muss ergibt sich $a=10:2=5$.
Nun subtrahieren wir $5k^2$ von den ursprünglichen Werten und es ergeben sich die Werte

$$88-5\cdot 3^2=43 \qquad 134-5\cdot 4^2=54 \qquad 190-5\cdot 5^2=65$$

Wir sehen, dass der konstante Anstieg dieser linearen Folge 11 ist, also haben wir $b = 11$. Setzen wir das nun in den Ansatz $5 \cdot 3^2 + 11 \cdot 3 + c = 88$ ein, erhalten wir $c = 10$, ebenfalls wie oben angegeben.

Der Rest läuft völlig analog.

b) Lösung:

$$t = 0 : 7k^2 + 35k + 12 \quad t = 1 : 7k^2 + 29k + 16 \quad t = 2 : 7k^2 + 30k + 11 \quad t = 3 : 7k^2 + 38k + 24$$

$$t = 4 : 7k^2 + 39k + 32 \qquad t = 5 : 7k^2 + 33k + 32 \qquad t = 6 : 7k^2 + 41k + 36$$

Herleitung:

Es dürfte aus den Resultaten klar geworden sein, dass die Restklassen, die jeweils eine eigene Formel liefern, modulo der Differenz von größtem und kleinstem Wert genommen werden müssen. Wir haben hier also 7 Formeln gemäß dem 7er-Rest von n zu erwarten.

Da die Herleitung ansonsten nicht anders ist als bei **a)**, geben wir hier lediglich eine ausreichende Serie von Ad-hoc-Werten für den Schwellenwert an, die die Fälle $k = 3$ bis $k = 5$ überdecken:

$$n = 21 : s = 180 \qquad n = 22 : s = 166 \qquad n = 23 : s = 164 \qquad n = 24 : s = 201$$

$$n = 25 : s = 212 \qquad n = 26 : s = 194 \qquad n = 27 : s = 222$$

$$n = 28 : s = 264 \qquad n = 29 : s = 244 \qquad n = 30 : s = 243 \qquad n = 31 : s = 288$$

$$n = 32 : s = 300 \qquad n = 33 : s = 276 \qquad n = 34 : s = 312$$

$$n = 35 : s = 362 \qquad n = 36 : s = 336 \qquad n = 37 : s = 336 \qquad n = 38 : s = 389$$

$$n = 39 : s = 402 \qquad n = 40 : s = 372 \qquad n = 41 : s = 416$$

Damit lassen sich mit den beiden in **a)** gezeigten Methoden und etwas Rechnung alle 7 Formeln rasch herleiten. Wir wollen nicht verschweigen, dass ein gewisses Gefühl für quadratische Terme es sehr wohl ermöglicht, z.B. sehr einfach von der Formel für $t = 2$ auf die von $t = 3$ zu schließen (oder vice versa), sodass der Kundige nicht alle diese Rechnungen wirklich ausführen muss. Die Hauptarbeit besteht aber darin, sich die obige Liste von Schwellenwerten (oder eine gleichwertige) zu besorgen, deshalb die relativ vielen Punkte für die Aufgabe.

Aufgabe 4

a) a1) Lösung: 1

Herleitung:

Obwohl 80 unter dem Schwellenwert liegt, ist eine Linearkombination möglich, nämlich $80 = 10 \cdot 8 + 0 \cdot 13$.

Die Formel aus der Vorlesung liefert

$$\left[\frac{80 - 13 \cdot ([80]_8 \cdot [13]_8^{-1})^*}{8 \cdot 13} + 1\right] = \left[\frac{80}{104} + 1\right] = 1$$

Passt!

a2 Lösung: 0

Herleitung:

Der Schwellenwert ist 84, die Zahl 83 ist eins darunter, kann also auf keinen Fall eine ganzzahlige nichtnegative Linearkombination haben.

a3 Lösung: 2

Herleitung:

Unsere Formel lautet

$$\left[\frac{120 - 13 \cdot ([120]_8 \cdot [13]_8^{-1})}{104} + 1\right] = \left[\frac{120}{104} + 1\right] = 2$$

Man kann aber auch $120 = 15 \cdot 8 + 0 \cdot 13 = 2 \cdot 8 + 8 \cdot 13$ sehen, und nach den Überlegungen vor dem Beweis von Satz 1 kann es keine weiteren Möglichkeiten geben.

a4 Lösung: 5

Herleitung:

Die Formel sagt

$$\left[\frac{555 - 13 \cdot ([555]_8 - [13]_8^{-1})}{104} + 1\right]$$

Nun ist $[555]_8 = [3]_8$ und $[13]_8^{-1} = [5]_8^{-1} = [5]_8$, ferner $([3]_5 \cdot [5]_8)^* = 7$, also ergibt die Formel

$$\left[\frac{555 - 13 \cdot 7}{104} + 1\right] = \left[\frac{464}{104} + 1\right] = 5$$

b) Wir haben hier einen Datensatz der Form $\{n,\ n+1,\ n+3\}$ vor uns, also ist $i = 3$. Laut Skript müssen wir die Formel

$$\sum_{j=\left[\frac{x+n+i-1}{n+i}\right]}^{\left[\frac{x}{n}\right]} \left(\left[\frac{j(n+i) - x - i \cdot ([x]_{i-1})^*}{i(i-1)} + 1\right] - max(0, \left[\frac{(n+1)j - x}{i-1}\right]) \right)$$

verwenden. Alas!

b1) Lösung: 1

Herleitung:

Es ist

$$\left[\frac{x+n+i-1}{n+i}\right] = \left[\frac{37+9+2}{12}\right] = 4 \qquad \left[\frac{37}{9}\right] = 4$$

Unsere Summe besteht also aus einem einzigen Summanden mit $j = 4$; dann:

$$\left[\frac{j(n+i) - x - i \cdot ([j(n+i) - x]_{i-1})^*}{i(i-1)} + 1\right] - max(0, \left[\frac{(n+1)j - x}{i-1}\right]$$

$$= \left\lceil \frac{4 \cdot 12 - 37 - 3 \cdot ([4 \cdot 12 - 37]_2)^*}{6} + 1 \right\rceil - max(0, \left\lceil \frac{10 \cdot 4 - 37}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{48 - 37 - 3}{6} + 1 \right\rceil - \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = 2 - 1 = 1$$

b2) Lösung: 2

Herleitung:

Hier läuft j von $\left\lceil \frac{50+9+2}{12} \right\rceil = 5$ bis $\left\lceil \frac{50}{9} \right\rceil = 5$, wir haben also wieder nur einen Summanden. Dieser lautet hier:

$$\left\lceil \frac{5 \cdot 12 - 50 - 3 \cdot ([5 \cdot 12 - 50]_2)^*}{6} + 1 \right\rceil - max(0, \left\lceil \frac{10 \cdot 5 - 50}{2} \right\rceil) = 2 - 0 = 0$$

b3) Lösung: 14

Herleitung:

Hier läuft j von $\left\lceil \frac{173+9+2}{12} \right\rceil = 15$ bis $\left\lceil \frac{173}{9} \right\rceil = 19$, wir haben also 5 Summanden, die wir der Reihe nach berechnen:

$$\left\lceil \frac{15 \cdot 12 - 173 - 3 \cdot ([15 \cdot 12 - 173]_2)^*}{6} + 1 \right\rceil - max(0, \left\lceil \frac{10 \cdot 15 - 173}{2} \right\rceil) = 1 - 0 = 1$$

$$\left\lceil \frac{16 \cdot 12 - 173 - 3 \cdot ([16 \cdot 12 - 173]_2)^*}{6} + 1 \right\rceil - max(0, \left\lceil \frac{10 \cdot 16 - 173}{2} \right\rceil) = 3 - 0 = 3$$

$$\left\lceil \frac{17 \cdot 12 - 173 - 3 \cdot ([17 \cdot 12 - 173]_2)^*}{6} + 1 \right\rceil - max(0, \left\lceil \frac{10 \cdot 17 - 173}{2} \right\rceil) = 5 - 0 = 5$$

$$\left\lceil \frac{18 \cdot 12 - 173 - 3 \cdot ([18 \cdot 12 - 173]_2)^*}{6} + 1 \right\rceil - max(0, \left\lceil \frac{10 \cdot 18 - 173}{2} \right\rceil) = 7 - 3 = 4$$

$$\left\lceil \frac{19 \cdot 12 - 173 - 3 \cdot ([19 \cdot 12 - 173]_2)^*}{6} + 1 \right\rceil - max(0, \left\lceil \frac{10 \cdot 19 - 173}{2} \right\rceil) = 9 - 8 = 1$$

In der Summe: $1 + 3 + 5 + 4 + 1 = 14$.

b4) Lösung: 51

Herleitung:

Hier rangiert j von $\left\lceil \frac{300+9+2}{12} \right\rceil = 25$ bis $\left\lceil \frac{300}{9} \right\rceil = 33$, wir haben also 9 Summanden. Diese sind:

$$\left\lceil \frac{25 \cdot 12 - 300 - 3 \cdot ([25 \cdot 12 - 300]_2)^*}{6} + 1 \right\rceil - max(0, \left\lceil \frac{10 \cdot 25 - 300}{2} \right\rceil) = 1 - 0 = 1$$

$$\left\lceil \frac{26 \cdot 12 - 300 - 3 \cdot ([26 \cdot 12 - 300]_2)^*}{6} + 1 \right\rceil - max(0, \left\lceil \frac{10 \cdot 26 - 300}{2} \right\rceil) = 3 - 0 = 3$$

$$\left\lceil \frac{27 \cdot 12 - 300 - 3 \cdot ([25 \cdot 12 - 300]_2)^*}{6} + 1 \right\rceil - max(0, \left\lceil \frac{10 \cdot 27 - 300}{2} \right\rceil) = 5 - 0 = 5$$

$$\left\lceil \frac{28 \cdot 12 - 300 - 3 \cdot ([28 \cdot 12 - 300]_2)^*}{6} + 1 \right\rceil - max(0, \left\lceil \frac{10 \cdot 28 - 300}{2} \right\rceil) = 7 - 0 = 7$$

$$\left\lceil \frac{29 \cdot 12 - 300 - 3 \cdot ([29 \cdot 12 - 300]_2)^*}{6} + 1 \right\rceil - max(0, \left\lceil \frac{10 \cdot 29 - 300}{2} \right\rceil) = 9 - 0 = 9$$

$$\left\lceil \frac{30 \cdot 12 - 300 - 3 \cdot ([30 \cdot 12 - 300]_2)^*}{6} + 1 \right\rceil - max(0, \left\lceil \frac{10 \cdot 30 - 300}{2} \right\rceil) = 11 - 0 = 11$$

$$\left\lceil \frac{31 \cdot 12 - 300 - 3 \cdot ([31 \cdot 12 - 300]_2)^*}{6} + 1 \right\rceil - max(0, \left\lceil \frac{10 \cdot 31 - 300}{2} \right\rceil) = 13 - 5 = 8$$

$$\left[\frac{32\cdot 12-300-3\cdot([32\cdot 12-300]_2)^*}{6}+1\right]-max(0,\left[\frac{10\cdot 32-300}{2}\right])=15-10=5$$

$$\left[\frac{33\cdot 12-300-3\cdot([33\cdot 12-300]_2)^*}{6}+1\right]-max(0,\left[\frac{10\cdot 33-300}{2}\right])=17-15=2$$

Zusammen: $1+3+5+7+9+11+8+5+2=51$.

c) Wir haben hier einen Datensatz des Typs $\{n,\ n+i-1,\ n+i\}$ vorliegen, also ist die Formel aus Satz 6 zu verwenden:

$$\sum_{j=\left[\frac{x+n+i-1}{n+i}\right]}^{\left[\frac{x}{n}\right]}\left[\frac{x-jn-i\cdot([x-jn]_{i-1})^*}{i(i-1)}+1\right]-max(0,\left[\frac{x-j\cdot(n+i-1)}{i-1}\right])$$

Hier gilt: $n=12$ und $i=5$. Damit wird die obige Formel etwas konkreter:

$$\sum_{j=\left[\frac{x+n+4}{17}\right]}^{\left[\frac{x}{12}\right]}\left[\frac{x-12j-5\cdot([x-12j]_4)^*}{20}+1\right]-max(0,\left[\frac{x-16j}{4}\right])$$

c1) Lösung: 1

Herleitung:

j läuft von $\left[\frac{44+12+4}{17}\right]=3$ bis $\left[\frac{44}{12}\right]=3$, also

$$\left[\frac{44-12\cdot 3-5\cdot([44-12\cdot 3]_4)^*}{20}+1\right]-max(0,\left[\frac{44-16\cdot 3}{4}\right])=1-0=1$$

c2) Lösung: 6

Herleitung:

j läuft von $\left[\frac{144+12+4}{17}\right]=9$ bis $\left[\frac{144}{12}\right]=12$.
Die Summanden sind:

$$\left[\frac{144-12\cdot 9-5\cdot([144-12\cdot 9]_4)^*}{20}+1\right]-max(0,\left[\frac{144-16\cdot 9}{4}\right])=2-0=2$$

$$\left[\frac{144-12\cdot 10-5\cdot([144-12\cdot 10]_4)^*}{20}+1\right]-max(0,\left[\frac{144-16\cdot 10}{4}\right])=2-0=2$$

$$\left[\frac{144-12\cdot 11-5\cdot([144-12\cdot 11]_4)^*}{20}+1\right]-max(0,\left[\frac{144-16\cdot 11}{4}\right])=1-0=1$$

$$\left[\frac{144-12\cdot 12-5\cdot([144-12\cdot 12]_4)^*}{20}+1\right]-max(0,\left[\frac{144-16\cdot 12}{4}\right])=1-0=1$$

Wir addieren: $2+2+1+1=6$.

c3) Lösung: 17

Herleitung:

j rangiert von $\left[\frac{301+12+4}{17}\right]=18$ bis $\left[\frac{301}{12}\right]=25$.
Die Summanden sind

$$\left[\frac{301-12\cdot 18-5\cdot([301-12\cdot 18]_4)^*}{20}+1\right]-max(0,\left[\frac{301-16\cdot 18}{4}\right])=5-3=2$$

$$\left[\frac{301-12\cdot 19-5\cdot([301-12\cdot 19]_4)^*}{20}+1\right]-max(0,\left[\frac{301-16\cdot 19}{4}\right])=4-0=4$$

$$\left[\frac{301-12\cdot 20-5\cdot([301-12\cdot 20]_4)^*}{20}+1\right]-max(0,\left[\frac{301-16\cdot 20}{4}\right])=3-0=3$$

$$\left[\frac{301-12\cdot 21-5\cdot([301-12\cdot 21]_4)^*}{20}+1\right]-max(0,\left[\frac{301-16\cdot 21}{4}\right])=3-0=3$$

$$\left[\frac{301-12\cdot 22-5\cdot([301-12\cdot 22]_4)^*}{20}+1\right]-max(0,\left[\frac{301-16\cdot 22}{4}\right])=2-0=2$$

$$\left[\frac{301-12\cdot 23-5\cdot([301-12\cdot 23]_4)^*}{20}+1\right]-max(0,\left[\frac{301-16\cdot 23}{4}\right])=2-0=2$$

$$\left[\frac{301-12\cdot 24-5\cdot([301-12\cdot 24]_4)^*}{20}+1\right]-max(0,\left[\frac{301-16\cdot 24}{4}\right])=1-0=1$$

$$\left[\frac{301-12\cdot 25-5\cdot([301-12\cdot 25]_4)^*}{20}+1\right]-max(0,\left[\frac{301-16\cdot 25}{4}\right])=0-0=0$$

Wir summieren: $2+4+3+3+2+2+1+0=17$

d) Wir haben es hier mit einem Datensatz vom Typ $\{n;\ n+2;\ n+i\}$ zu tun, deshalb gilt für ihn die Formel

$$\sum_{\left[\frac{x+n+i-1}{n+i}\right]}^{\left[\frac{x}{n}\right]}\left[\frac{min\left(\left[\frac{j(n+i)-x}{i-2}\right],\left[\frac{x-jn}{2}\right]\right)-([x-jn]_i\cdot[2]_i^{-1})^*}{i}+1\right]$$

Hier haben wir $n=17$ und $i=13$, konkret lautet unsere Formel also

$$\sum_{\left[\frac{x+29}{30}\right]}^{\left[\frac{x}{17}\right]}\left[\frac{min\left(\left[\frac{30j-x}{11}\right],\left[\frac{x-17j}{2}\right]\right)-([x-17j]_{13}\cdot[2]_{13}^{-1})^*}{13}+1\right]$$

Wegen $[2]_{13}^{-1}=[7]_{13}$ können wir weiter konkretisieren:

$$\sum_{\left[\frac{x+29}{30}\right]}^{\left[\frac{x}{17}\right]}\left[\frac{min\left(\left[\frac{30j-x}{11}\right],\left[\frac{x-17j}{2}\right]\right)-([x-17j]_{13}\cdot[7]_{13})^*}{13}+1\right]$$

d1) Lösung: 1

Herleitung:

j geht von $\left[\frac{100+29}{30}\right]=4$ bis $\left[\frac{100}{17}\right]=5$.

Die Summanden sind:

$$\left[\frac{min\left(\left[\frac{30\cdot 4-100}{11}\right],\left[\frac{100-17\cdot 4}{2}\right]\right)-([100-17\cdot 4]_{13}\cdot[7]_{13})^*}{13}+1\right]=\left[\frac{min(1;\ 16)-3}{13}\right]+1=-1+1=0$$

$$\left[\frac{min\left(\left[\frac{30\cdot 5-100}{11}\right],\left[\frac{100-17\cdot 5}{2}\right]\right)-([100-17\cdot 5]_{13}\cdot[7]_{13})^*}{13}+1\right]=\left[\frac{min(4;\ 7)-1}{13}\right]+1=0+1=1$$

Das ergibt in der Summe natürlich 1.

d2) Lösung: 0

Herleitung:

j geht von $\left[\frac{101+29}{30}\right]=4$ bis $\left[\frac{101}{17}\right]=5$.

Die Summanden sind:

$$\left[\frac{min\left(\left[\frac{30\cdot4-101}{11}\right],\left[\frac{101-17\cdot4}{2}\right]\right)-([101-17\cdot4]_{13}\cdot[7]_{13})^*}{13}+1\right]=\left[\frac{min(2;\ 16)-10}{13}\right]+1=-1+1=0$$

$$\left[\frac{min\left(\left[\frac{30\cdot5-101}{11}\right],\left[\frac{101-17\cdot5}{2}\right]\right)-([101-17\cdot5]_{13}\cdot[7]_{13})^*}{13}+1\right]=\left[\frac{min(4;\ 8)-8}{13}\right]+1=-1+1=0$$

Das ergibt in der Summe natürlich 0..

d3) Lösung: 4

Herleitung:

j geht von $\left[\frac{255+29}{30}\right]=9$ bis $\left[\frac{255}{17}\right]=15$.

Die Summanden sind:

$$\left[\frac{min\left(\left[\frac{30\cdot9-255}{11}\right],\left[\frac{255-17\cdot9}{2}\right]\right)-([255-17\cdot9]_{13}\cdot[7]_{13})^*}{13}+1\right]=\left[\frac{min(1;\ 51)-12}{13}\right]+1=-1+1=0$$

$$\left[\frac{min\left(\left[\frac{30\cdot10-255}{11}\right],\left[\frac{255-17\cdot10}{2}\right]\right)-([255-17\cdot10]_{13}\cdot[7]_{13})^*}{13}+1\right]=\left[\frac{min(4;\ 42)-10}{13}\right]+1=-1+1=0$$

$$\left[\frac{min\left(\left[\frac{30\cdot11-255}{11}\right],\left[\frac{255-17\cdot11}{2}\right]\right)-([255-17\cdot11]_{13}\cdot[7]_{13})^*}{13}+1\right]=\left[\frac{min(6;\ 34)-8}{13}\right]+1=-1+1=0$$

$$\left[\frac{min\left(\left[\frac{30\cdot12-255}{11}\right],\left[\frac{255-17\cdot12}{2}\right]\right)-([255-17\cdot12]_{13}\cdot[7]_{13})^*}{13}+1\right]=\left[\frac{min(9;\ 25)-6}{13}\right]+1=0+1=1$$

$$\left[\frac{min\left(\left[\frac{30\cdot13-255}{11}\right],\left[\frac{255-17\cdot13}{2}\right]\right)-([255-17\cdot13]_{13}\cdot[7]_{13})^*}{13}+1\right]=\left[\frac{min(12;\ 17)-4}{13}\right]+1=0+1=1$$

$$\left[\frac{min\left(\left[\frac{30\cdot14-255}{11}\right],\left[\frac{255-17\cdot14}{2}\right]\right)-([255-17\cdot14]_{13}\cdot[7]_{13})^*}{13}+1\right]=\left[\frac{min(15;\ 8)-2}{13}\right]+1=0+1=1$$

$$\left[\frac{min\left(\left[\frac{30\cdot15-255}{11}\right],\left[\frac{255-17\cdot9}{2}\right]\right)-([255-17\cdot15]_{13}\cdot[7]_{13})^*}{13}+1\right]=\left[\frac{min(17;\ 0)-0}{13}\right]+1=0+1=1$$

Wir summieren: $1+1+1+1=4$.

d4) Lösung: 14

Herleitung:

j geht von $\left[\frac{500+29}{30}\right]=17$ bis $\left[\frac{500}{17}\right]=29$.

Die Summanden sind:

$$\left[\frac{min\left(\left[\frac{30\cdot17-500}{11}\right],\left[\frac{500-17\cdot17}{2}\right]\right)-([500-17\cdot17]_{13}\cdot[7]_{13})^*}{13}+1\right]=\left[\frac{min(0;\ 105)-8}{13}\right]+1=-1+1=0$$

$$\left[\frac{min\left(\left[\frac{30\cdot18-500}{11}\right],\left[\frac{500-17\cdot18}{2}\right]\right)-([500-17\cdot18]_{13}\cdot[7]_{13})^*}{13}+1\right]=\left[\frac{min(3;\ 97)-6}{13}\right]+1=-1+1=0$$

$$\left[\frac{min\left(\left[\frac{30\cdot19-500}{11}\right],\left[\frac{500-17\cdot19}{2}\right]\right)-([500-17\cdot19]_{13}\cdot[7]_{13})^*}{13}+1\right]=\left[\frac{min(6;\ 88)-6}{13}\right]+1=0+1=1$$

$$\left[\frac{min\left(\left[\frac{30\cdot20-500}{11}\right],\left[\frac{500-17\cdot20}{2}\right]\right)-([500-17\cdot20]_{13}\cdot[7]_{13})^*}{13}+1\right]=\left[\frac{min(9;\ 80)-4}{13}\right]+1=0+1=1$$

$$\left[\frac{min\left(\left[\frac{30\cdot21-500}{11}\right],\left[\frac{500-17\cdot21}{2}\right]\right)-([500-17\cdot21]_{13}\cdot[7]_{13})^*}{13}+1\right]=\left[\frac{min(11;\ 71)-2}{13}\right]+1=0+1=1$$

$$\left[\frac{min\left(\left[\frac{30\cdot22-500}{11}\right],\left[\frac{500-17\cdot22}{2}\right]\right)-([500-17\cdot22]_{13}\cdot[7]_{13})^*}{13}+1\right]=\left[\frac{min(14;\ 63)-0}{13}\right]+1=1+1=2$$

$$\left[\frac{min\left(\left[\frac{30\cdot23-500}{11}\right],\left[\frac{500-17\cdot23}{2}\right]\right)-([500-17\cdot23]_{13}\cdot[7]_{13})^*}{13}+1\right]=\left[\frac{min(17;\ 54)-11}{13}\right]+1=0+1=1$$

$$\left[\frac{min\left(\left[\frac{30\cdot24-500}{11}\right],\left[\frac{500-17\cdot24}{2}\right]\right)-([500-17\cdot24]_{13}\cdot[7]_{13})^*}{13}+1\right]=\left[\frac{min(20;\ 46)-9}{13}\right]+1=0+1=1$$

$$\left[\frac{min\left(\left[\frac{30\cdot25-500}{11}\right],\left[\frac{500-17\cdot25}{2}\right]\right)-([500-17\cdot25]_{13}\cdot[7]_{13})^*}{13}+1\right]=\left[\frac{min(22;\ 37)-7}{13}\right]+1=1+1=2$$

$$\left[\frac{min\left(\left[\frac{30\cdot26-500}{11}\right],\left[\frac{500-17\cdot26}{2}\right]\right)-([500-17\cdot26]_{13}\cdot[7]_{13})^*}{13}+1\right]=\left[\frac{min(25;\ 29)-5}{13}\right]+1=1+1=2$$

$$\left[\frac{min\left(\left[\frac{30\cdot27-500}{11}\right],\left[\frac{500-17\cdot27}{2}\right]\right)-([500-17\cdot27]_{13}\cdot[7]_{13})^*}{13}+1\right]=\left[\frac{min(28;\ 20)-3}{13}\right]+1=1+1=2$$

$$\left[\frac{min\left(\left[\frac{30\cdot28-500}{11}\right],\left[\frac{500-17\cdot28}{2}\right]\right)-([500-17\cdot28]_{13}\cdot[7]_{13})^*}{13}+1\right]=\left[\frac{min(30;\ 12)-1}{13}\right]+1=0+1=1$$

$$\left[\frac{min\left(\left[\frac{30\cdot29-500}{11}\right],\left[\frac{500-17\cdot29}{2}\right]\right)-([500-17\cdot29]_{13}\cdot[7]_{13})^*}{13}+1\right]=\left[\frac{min(33;\ 3)-12}{13}\right]+1=-1+1=0$$

Die Summe: $0+0+1+1+1+2+1+1+2+2+2+1=14$

e) e1) Lösung: 6

Herleitung:

Es gibt gleich viele Möglichkeiten wie aus $\{10;\ 11;\ 12\}$ die Zahl 100 ganzzahlig nichtnegativ linear zu kombinieren. Wir müssen also wieder die Formel

$$\sum_{j=\left[\frac{x+n+i-1}{n+i}\right]}^{\left[\frac{x}{n}\right]}\left(\left[\frac{j(n+i)-x-i\cdot([x]_{i-1})^*}{i(i-1)}+1\right]-max(0,\left[\frac{(n+1)j-x}{i-1}\right])\right)$$

bemühen, diesmal mit $n=10$ und $i=2$, die Formel wir dann zu

$$\sum_{j=\left[\frac{x+11}{12}\right]}^{\left[\frac{x}{10}\right]}\left(\left[\frac{12j-x-2\cdot([x]_1)^*}{2}+1\right]-max(0,\left[\frac{11j-x}{1}\right])\right)$$

Also läuft j von $\left[\frac{100+11}{12}\right]=9$ bis $\left[\frac{100}{10}\right]=10$.

Die Summanden sind

$$\left(\left[\frac{108-100-2\cdot([100]_1)^*}{2}+1\right]-max(0,\left[\frac{1)\cdot9-100}{1}\right]\right)=5-0=5$$

$$\left(\left[\frac{120-100-2\cdot([100]_1)^*}{2}+1\right]-max(0,\left[\frac{1)\cdot10-100}{1}\right]\right)=11-10=1$$

Und $5+1=6$

e2) Lösung: 0

Herleitung:

Natürlich lässt sich aus lauter geraden Zahlen keine ungerade Zahl summieren.

f) Wir haben hier keine Formel, aber eine Überlegung mit Resten gibt uns hier jeweils rasch Aufschluss. Da sowohl 10 als auch 15 durch 5 teilbar sind, muss der 5er-Rest der Zahl x allein von den 17er-Summanden geleistet werden. Hat man den passenden 5er-Rest erreicht, erzielt man mit einem (oder keinem) 15-er Summanden den passenden 10er-Rest. Ab dann kann man passend Vielfache von 10 addieren. Oder man kann 2, 4, 6 ... 15er addieren — sofern man damit nicht übers Ziel hinausschießt — und gegebenenfalls 10 17er addieren, was hier stets an der Größe von x scheitern wird.
Mit diesem Plan ausgestattet, lassen sich alle Möglichkeiten leicht ad hoc finden (aber nur, weil x nicht all zu groß ist).

f1) Lösung: 2

Herleitung:

Der 5er-Rest von 47 ist 2, das geht hier nur mit $1 \cdot 17$, denn $6 \cdot 17$ wäre schon viel zu viel. Also haben wir aus 10 und 15 noch 30 zu summieren. Das geht mit 3 10er oder 2 15ern. Somit sind

$$47 = 17 + 15 + 15 = 17 + 10 + 10 + 10$$

schon alle Möglichkeiten.

f2) Lösung: 8

Herleitung:

201 ist 1 modulo 5, das geht mit $3 \cdot 17$ und $8 \cdot 17$ ($13 \cdot 17$ ist bereits größer als 201).
Beginnen wir mit $3 \cdot 17 = 51$, das hat gleich den richtigen 10er-Rest.

Wir können nun 'bis zum Überlaufen' 15er-Paare addieren und den Rest mit 10ern auffüllen, das ergibt die Möglichkeiten:

$$201 = 3 \cdot 17 + 0 \cdot 15 + 15 \cdot 10 = 3 \cdot 17 + 2 \cdot 15 + 12 \cdot 10 = 3 \cdot 17 + 4 \cdot 15 + 9 \cdot 10$$

$$= 3 \cdot 17 + 6 \cdot 15 + 6 \cdot 10 = 3 \cdot 17 + 8 \cdot 15 + 3 \cdot 10 = 3 \cdot 17 + 10 \cdot 15 + 0 \cdot 10$$

Das sind schon mal 6 Möglichkeiten.

Verwenden wir 8 17er, ergibt sich zunächst 136, das noch den falschen 10er-Rest hat, wir müssen also auf jeden Fall noch ein 15 addieren, gibt 151, womit ein Summenrest von 50 verbleibt, der mit 15-Paaren und 10ern aufgefüllt werden muss. Dafür gibt es die Möglichkeiten

$$201 = 8 \cdot 17 + 1 \cdot 15 + 5 \cdot 10 = 8 \cdot 17 + 3 \cdot 15 + 2 \cdot 10$$

Mit diesen weiteren 2 Möglichkeiten addiert sich das zu insgesamt 8 Möglichkeiten.

Aufgabe 5:

a) Lösung:

$$9 \cdot 60 + 0 \cdot 45 + 0 \cdot 35 \qquad 7 \cdot 60 + 2 \cdot 45 + 1 \cdot 35 \qquad 5 \cdot 60 + 4 \cdot 45 + 2 \cdot 35$$

$$5 \cdot 60 + 1 \cdot 45 + 6 \cdot 35 \qquad 3 \cdot 60 + 6 \cdot 45 + 3 \cdot 35 \qquad 3 \cdot 60 + 3 \cdot 45 + 7 \cdot 35$$

$$3 \cdot 60 + 0 \cdot 45 + 11 \cdot 35 \qquad 1 \cdot 60 + 11 \cdot 45 + 0 \cdot 35 \qquad 1 \cdot 60 + 8 \cdot 45 + 4 \cdot 35$$

$$1 \cdot 60 + 5 \cdot 45 + 8 \cdot 35 \qquad 1 \cdot 60 + 2 \cdot 45 + 12 \cdot 35$$

Herleitung:

Das Problem bei der Aufgabe ist, dass unterschiedliche Gesamtzahlen unterschiedliche Abzüge ergeben. Dieses Problem kann man aber ganz einfach umgehen:

Wenn wir insgesamt j Rohre stecken, verlieren wir $(j-1) \cdot 5$ cm. Wenn wir uns vorstellen, dass wir stattdessen $5j$ verlören, so würde das auf dasselbe hinauslaufen, wie wenn wir jedes Rohr um 5 cm kürzten. Wir rechnen also jetzt mit Rohren der Länge 30 cm, 40 cm und 55 cm. Und die 5 cm, die wir uns zu viel abgezogen haben, zählen wir einfach wieder dazu. Unser neuer Ansatz lautet also (die cm lassen wir ab jetzt weg):

$$a \cdot 55 + b \cdot 40 + c \cdot 30 + 5 = 500 \iff 11a + 8b + 6c = 99$$

Nun überlegen wir uns, dass die Gesamtzahl der Summanden j zwischen 9 (reicht gerade mit lauter 11en) und 16 rangieren muss, und ersetzen deshalb c durch $j - a - b$:

$$11a + 8b + 6(j - a - b) = 99 \iff 2b + 5a = 99 - 6j$$

und beginnen durch unsere j zu wandern:

$j = 9 : 2b + 5a = 45$ geht nur mit $a = 9;\ b = 0$ weil $a = 7;\ b = 5$ ein negatives $c = j - a - b$ liefern würde. (Dieses Argument, das weitere numerisch mögliche Lösungen ausschließt, werden wir nicht gebetsmühlenartig wiederholen).
$j = 10 : 2b + 5a = 39$ geht nur mit $a = 7;\ b = 2$, c wird dann 1.
$j = 11 : 2b + 5a = 33$ geht nur mit $a = 5;\ b = 4$ und $c = 2$.
$j = 12 : 2b + 5a = 27$ geht mit $a = 5;\ b = 1;\ c = 6$ und $a = 3;\ b = 6;\ c = 3$ und $a = 1;\ b = 11;\ c = 0$.
$j = 13 : 2b + 5a = 21$ geht mit $a = 3;\ b = 3;\ c = 7$ und $a = 1;\ b = 8;\ c = 4$.
$j = 14 : 2b + 5a = 15$ geht mit $a = 3;\ b = 0;\ c = 11$ und $a = 1;\ b = 5;\ c = 8$.
$j = 15 : 2b + 5a = 9$ geht mit $a = 1;\ b = 2;\ c = 12$.
$j = 16 : 2b + 5a = 3$ geht überhaupt nicht.

Jetzt muss man die Lösungen nur noch richtig anordnen.

b) Lösung: Möglich mit: 60; 61; 62; 63; 68; 69; 70; 71; 72; und 73; nicht möglich mit 64; 65; 66; 67; 74 und 75.

Herleitung:

Wir gehen folgendermaßen vor: Wir parametrisieren nach der Anzahl der verwendeten 42er-Packungen und danach nach der Anzahl der verwendeten 25er-Packungen. Die dritte Zahl, die die Linearkombination ermöglichen soll, muss dann ein Teiler der Restanzahl sein. Wir überprüfen also, welche Teiler der Restgummibärenzahl in den Bereich 60 bis 75 fallen; falls das überhaupt welche tun.

0 42er:

0 25er: Rest: $288 = 2^5 \cdot 3^2$, Teiler zwischen 60 und 75: 72
1 25er: Rest: 263, Primzahl; Teiler zwischen 60 und 75: —
2 25er: Rest: $238 = 2 \cdot 7 \cdot 17$, Teiler zwischen 60 und 75: —
3 25er: Rest: $213 = 3 \cdot 71$, Teiler zwischen 60 und 75: 71
4 25er: Rest: $188 = 2^2 \cdot 47$, Teiler zwischen 60 und 75: —

5 25er: Rest: 163, Primzahl; Teiler zwischen 60 und 75: —
6 25er: Rest: $138 = 2 \cdot 3 \cdot 23$, Teiler zwischen 60 und 75: 69
7 25er: Rest: 113, Primzahl; Teiler zwischen 60 und 75: —
8 25er: Rest: $88 = 2^3 \cdot 11$, Teiler zwischen 60 und 75: —
9 25er: Rest: $63 = 3^2 \cdot 7$, Teiler zwischen 60 und 75: 63
Rest zu klein.

1 42er:

0 25er: Rest: $246 = 2 \cdot 3 \cdot 61$, Teiler zwischen 60 und 75: 61
1 25er: Rest: $221 = 13 \cdot 17$, Teiler zwischen 60 und 75: —
2 25er: Rest: $196 = 2^2 \cdot 7^2$, Teiler zwischen 60 und 75: —
3 25er: Rest: $171 = 3^2 \cdot 19$, Teiler zwischen 60 und 75: —
4 25er: Rest: $146 = 2 \cdot 73$, Teiler zwischen 60 und 75: 73
5 25er: Rest: $121 = 11^2$, Teiler zwischen 60 und 75: —
6 25er: Rest: 96 zu klein (echte Teiler kleinergleich der Hälfte!) 7 25er: Rest: 71, Primzahl; Teiler zwischen 60 und 75: 71

2 42er:

0 25er: Rest: $204 = 2^2 \cdot 3 \cdot 17$, Teiler zwischen 60 und 75: 68
1 25er: Rest: 179, Primzahl; Teiler zwischen 60 und 75: —
2 25er: Rest: $154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$, Teiler zwischen 60 und 75: —
3 25er: Rest: $129 = 3 \cdot 43$, Teiler zwischen 60 und 75: —
4 25er: Rest: $104 = 2^3 \cdot 13$, Teiler zwischen 60 und 75: —
5 25er: Rest: 79, Primzahl; Teiler zwischen 60 und 75: —
Rest zu klein

3 42er:

0 25er: Rest: $162 = 2 \cdot 3^4$, Teiler zwischen 60 und 75: —
1 25er: Rest: 137, Primzahl; Teiler zwischen 60 und 75: —
2 25er: Rest: 112, alle echten Teiler zu klein; Teiler zwischen 60 und 75: —
3 25er: Rest: 87, alle echten Teiler zu klein; Teiler zwischen 60 und 75: —
4 25er: Rest: 62, Teiler zwischen 60 und 75: 62
Rest zu klein

4 42er:

0 25er: Rest: $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$, Teiler zwischen 60 und 75: 60
1 25er: Rest: 95, alle echten Teiler zu klein; Teiler zwischen 60 und 75: —
2 25er: Rest: 70, Teiler zwischen 60 und 75: 70
Rest zu klein

5 42er:

0 25er: Rest: 78, alle echten Teiler zu klein; Teiler zwischen 60 und 75: —

Ab dann alles zu klein!

Ich halte diese Lösung nicht für einen Ausbund an Eleganz, aber immerhin enthält sie einen Beweis.

Aufgabe 6:

a) Lösung: 35

Herleitung:
Man muss also aus 7 Sorten 4 Sorten ohne Reihenfolge auswählen, dafür gibt es $\binom{7}{4} = 35$ Möglichkeiten.

b) Lösung: 840

Herleitung:
Hier werden 4 Sorten unter 7 Sorten *mit* Reihenfolge (feste Anordnung und unterschiedliche Bedeutung im Blister) ausgewählt, dafür gibt $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ Möglichkeiten.

c) Lösung: 210

Herleitung:
Hier werden 4 Sorten aus 7 Sorten ausgewählt, ohne Reihenfolge, aber *mit* Wiederholung. Dafür gibt $\binom{7+4-1}{4} = \binom{10}{4} = 210$ Möglichkeiten.
Falls man die Zahl ohne die (nicht im Schulpflichtstoff enthaltene) Formel herleiten möchte, kann man folgendermaßen vorgehen:
Man parametrisiere nach der möglichen Aufteilung gleicher Sorten.
Falls nur eine Sorte vorkommt, gibt es dafür genau 7 Möglichkeiten.
Falls drei Eier einer und ein Ei einer anderen Sorte vorkommt, gibt es dafür $7 \cdot 6 = 42$ Möglichkeiten.
Falls je zwei Eier einer und zwei Eier einer anderen Farbe vorkommen, gibt es dafür einfach zwei aus sieben Sorten auszuwählen, also $\binom{7}{2} = 21$ Möglichkeiten.
Falls man zwei Eier einer Sorte und zwei einzelne Eier jeweils einer anderen Sorte hat, gibt es dafür $7 \cdot (6 \cdot 5)/2 = 105$ Möglichkeiten. (Durch 2 deshalb, weil es ja egal ist, welches die zweite und welches die dritte Sorte ist).
Hat man schließlich 4 verschiedene Sorten, gibt es dafür laut **a)** 35 Möglichkeiten.
Zusammen: $7 + 42 + 21 + 105 + 35 = 210$.

d) Lösung: 2401 ($= 7^4$)

Herleitung: Wir haben hier freie Kombination (Ziehen mit Reihenfolge und mit Zurücklegen), also gibt $7^4 = 2401$ Möglichkeiten.

e) Lösung: 784

Herleitung:
Eigentlich besteht die Tüte aus zwei disjunkten 'Untertüten', derjenigen mit den großen und derjenigen mit den kleinen Eiern. Wie in **c)** gibt es für jede 'Untertüte' $\binom{7+2-1}{2} = \binom{8}{2} = 28$ Möglichkeiten, damit insgesamt $28 \cdot 28 = 784$ Möglichkeiten.

f) Lösung: 20160

Herleitung:
Im Superblister sind die einzelnen Eier wohlunterschieden, es gibt ein eindeutiges Ostersamstagei (= 1. Ei), ein 2. Ei und so weiter.
Für das erste Ei haben wir 7 Sorten und 4 Größen zur Auswahl, also 28 Möglichkeiten.
Für das zweite Ei haben wir noch 6 Sorten und 3 Größen zur Auswahl, also 18 Möglichkeiten.
Für das dritte Ei haben wir noch 5 Sorten und 2 Größen zur Auswahl, also 10 Möglichkeiten.
Für das vierte Ei haben wir noch 4 Sorten und 1 Größe zur Auswahl, also 4 Möglichkeiten.
Zusammen ergibt das $28 \cdot 18 \cdot 10 \cdot 4 = 20160$ Möglichkeiten.

g) Lösung: 3584

Herleitung:

Zunächst überlegen wir, wie die Eier gewichtsmäßig verteilt sein können.

Es ist möglich, jede Größe einmal zu verwenden.

Verwendet man eine Größe zweimal, gibt es folgende Möglichkeiten:
Zwei 60 g-Eier; Restgewicht 60 g, das ist nur als $2 \cdot 30$ auf zwei Eier zu verteilen.
Zwei 50 g-Eier; Restgewicht 80 g, das ist mit $2 \cdot 40\ g$ oder mit $50\ g + 30\ g$ zu machen.
Zwei 40 g-Eier; Restgewicht 100 g, das ist mit $2 \cdot 50\ g$ oder mit $60\ g + 40\ g$ zu machen.
Zwei 30 g-Eier; Restgewicht 120 g, das ist nur als $2 \cdot 60\ g$ auf zwei Eier zu verteilen.

Da wir zwei gleiche Eier wie 'mindestens zwei gleiche Eier' behandelt haben, haben wir damit alle Fälle abgehandelt. Fassen wir also zusammen:
$\alpha : 60 + 50 + 40 + 30$
$\beta : 60 + 60 + 30 + 30$
$\gamma : 50 + 50 + 40 + 40$
$\delta : 50 + 50 + 50 + 30$
$\epsilon : 60 + 40 + 40 + 40$

Andere Verteilungen sind nicht möglich.

Für α gibt es nach **b)** 840 Möglichkeiten.
Für β und γ gibt es nach **e)** 784 Möglichkeiten.
Für δ und ϵ gibt nach den Überlegungen von **e)** jeweils $\binom{7+3-1}{3} \cdot \binom{7+1-1}{1} = \binom{9}{3} \cdot \binom{7}{1} = 84 \cdot 7 = 588$ Möglichkeiten.

Weil das eine disjunkte Zerlegung ist, müssen wir für die Gesamtzahl summieren: $840 + 2 \cdot 784 + 2 \cdot 588 = 3584$ Möglichkeiten.

Aufgabe 7

a) **a1)** **Lösung:** 30360

Herleitung:

Zunächst wählen wir die beiden von A, E und N verschiedenen Buchstaben aus, die wir verwenden wollen, dafür haben wie $\binom{23}{2}$ Möglichkeiten.
Nun haben wir 5 verschiedene Buchstaben, die wir auf 5! Art und Weisen anordnen können, ergibt $\binom{23}{2} \cdot 5! = 30360$ Möglichkeiten.

a2) **Lösung:** 1380

Herleitung:

Hier können wir nur einen zusätzlichen Buchstaben wählen, den wir dann doppelt verwenden müssen. Dafür gibt es genau 23 Möglichkeiten. Man kann diese auf 5! Weisen anordnen, weil aber zwei der 5 Buchstaben gleich sind, gibt es immer zwei gleiche Worte, wir müssen also noch durch 2 teilen, ergibt $23 \cdot 5! : 2 = 1380$.

a3) **Lösung:** 4140

Herleitung:

Zunächst wählen wir aus, welchen der Pflichtbuchstaben wir verdoppeln, dafür gibt es offensichtlich 3 Möglichkeiten. Nun können wir noch einen weiteren Buchstaben wählen: 23 Möglichkeiten. Von den 5! Anordnungen sind wiederum jeweils 2 gleich, ergibt $3 \cdot 23 \cdot 5! : 2 = 4140$ Möglichkeiten.

a4) **Lösung:** 60

Herleitung:

Der Dreifachbuchstabe muss natürlich einer der Pflichtbuchstaben sein: 3 Möglichkeiten; und das ist schon alles, was wir an Buchstabenwahl machen können. Von den 5! Reihenfolgen sind diesmal jeweils $3! = 6$ gleich, weil jede Permutation der drei identischen Lettern das gleiche Wort ergibt. Also haben wir $3 \cdot 5! \cdot 6 = 60$ Möglichkeiten.

a5) **Lösung:** 90

Herleitung:

Keiner der Doppelbuchstaben kann ein neuer Buchstabe sein, denn das wären zusammen schon 4 Stück und es müssten noch mindestens 2 Pflichtbuchstaben hinzukommen. Also können wir lediglich den Pflichtbuchstaben auswählen, den wir *nicht* verdoppeln wollen, dafür haben wir 3 Möglichkeiten. Von den 5! Anordnungen sind 2×2 das gleiche Wort, weil wir ja zwei Pärchen haben, die ohne Veränderung ausgetauscht werden können. Macht insgesamt $3 \cdot 5! : 4 = 90$ Möglichkeiten.

b) Ich habe mich nochmal hingesetzt, um auch diese Aufgabe zu lösen, wobei sich unter Einbeziehung weiterer Fachwörterbücher — insbesondere solcher mit archaischen Wörtern — bestimmt noch mehr würden finden lassen. Ich habe jedenfalls bei meiner Recherche ein paar neue Wörter 'gelernt', die aber mangels früheren Wissens nicht gewertet wurden. Schuldhaft wurde nur das Wort 'Karen' als Eigenname aussortiert — das hätte gerade ich besser wissen müssen, s. Liste. Let's start;

Aalen* (Pl. Akk. von 'Aal)' Aaren (Pl. Akk. von 'Aar' = poet. Adler) Aasen (Pl. Akk. von 'Aas') baden Baken (Pl. von Bake) baren (s. Bares für Rares, nur eben wieder Akk.) Basen bauen Damen Daten Faden* Faxen gaben* Gagen Galen (Pl. von 'Gala') garen Gasen (Pl. Akk. von 'Gas') Gauen (Pl. Akk. von 'Gau') Gazen (Pl. Akk. von 'Gaze') haben Hafen hagen (arch. für 'einhegen' = mit einem Zaun umgeben) Haien (Pl. Akk. von 'Hai') Haken Hamen (Bez. für ein großes Fischernetz) Hasen hauen* Haxen Jaden (Pl. Akk. von 'Jade') jagen — kamen — Karen (Pl. Akk. von 'Kar') Kasen (jap. Gedichtform) Katen (Pl. von 'Kate') kauen laben laden* lagen* Laien Laken Lamen (mag. Anhänger) Laren (röm. Haus- und Schutzgötter) lasen lauen laxen Maden Magen Maien (arch. Dativ zu 'Mai') malen* Manen (vergötterte Ahnengeister) masen (arch. mit Wundmalen versehen) mauen (von ugs. 'mau'

= mies) Naben nagen nahen Namen Nasen Oasen Pagen palen (ndt. Erbsen aus der Hülse lösen) Paten Raben Raden (Pl. von 'Rade', auch Konrade = Blume) Rafen (schräg verlaufende Dachhölzer) ragen Rahen (Pl. zu 'Rahe' = waagr. Stange am Mast) raren rasen* raten* rauen sagen* sahen Samen Sauen (arch. Pl. zu 'sau') tagen Taren (Pl. von Tara = Verpackungsgewicht) Taten* tauen* Taxen vagen Vasen Waben Waden Wagen* Walen waren* Wasen waten zagen Zaren

Mindestens die mit * versehenen Wörter existieren auch mit geänderter Groß-/Kleinschreibung in anderer Bedeutung. Ganz schön viel...