Einige Bemerkungen zum Frankaturproblem
0. Einleitung

Vor langer Zeit kostete eine Postkarte 45 Cent Porto und ein Brief 55 Cent — kaum mehr vorstellbar bei den heutigen Tarifen. Wenn man als Privatmann viel Post fabrizierte, hatte man diese beiden Werte zuhause — die Freistempler waren noch relativ teuer und Internetcodes für die Frankatur noch gar nicht erfunden. Aber dann sollte eine Postkarte an befreundete Menschen ins Ausland gehen und musste mit 80 Cent frankiert werden oder der Brief war etwas zu dick und kostete laut Tabelle 1,30 Euro. Je nach persönlicher Gestimmtheit begab man sich grummelnd aufs Postamt — das es damals vielerorts noch als eigenständige Institution gab — und kaufte sich eine passende Marke oder man 'überfrankierte', d.h. man klebte mehr als gefordert (auf den dicken Brief etwa 1,35 Euro, das geht nämlich mit 3 mal 45 Cent) und schenkte der Post den Rest. Abenteurer unterfrankierten und riskierten, wenn das auffiel, ein fettes Strafporto beim Empfänger (oder zumindest den Rücklauf der Sendung) — in diesen Fällen war ihnen wohl der Empfänger nicht besonders wichtig...

Geht man mathematisch an die Sache heran, wird man sich zunächst fragen, welche Frankaturen man denn nun exakt kleben kann. Es ist sofort klar, dass die Beträge, die man exakt frankieren kann, alle durch 5 teilbar sind, weil 45 und 55 durch 5 teilbar sind, also auch jede 'Linearkombination' (ein Ausdruck der Form $x_1 \cdot 45 + x_2 \cdot 55$, wobei die x_i hier nichtnegative ganze Zahlen sind) der beiden Zahlen. Und man stellt fest, dass man nicht jede durch 5 teilbare Frankatur exakt kleben kann. Dann stellt sich aber heraus, dass es einen Schwellenwert gibt, ab dem *jede* (durch 5 teilbare) Frankatur exakt geklebt werden kann, in unserem Fall sind das 4 Euro.

Gehen wir nun zur Mathematisierung: Es sei $n_1, \dots n_k$ ein Set verschiedener natürlicher Zahlen, deren ggT 1 ist. Gibt es dann immer einen sogenannten *Schwellenwert* s, ab dem alle Frankaturen exakt klebbar sind, d.h. ab dem alle natürlichen Zahlen $t \geq s$ als nichtnegative Linearkombination, d.h. als ein Ausdruck der Form

$$t = x_1 n_1 + x_2 n_2 + \cdots + x_k n_k$$

mit ganzen, nichtnegativen Koeffizienten x_i darstellbar ist? Und sollte das so sein, stellen wir natürlich auch die 'kombinatorische Frage': Wie viele verschiedene Möglichkeiten für eine solche Summe gibt es dann für jedes solche t?

Die erste Frage nach der Existenz von s werden wir allgemein geben können, der Beweis wird aber nicht konstruktiv sein, d.h. es wird nicht möglich sein, aus dem Beweis den Wert von s abzuleiten.
Danach werden wir uns einfachen Spezialfällen zuwenden:
Für $k = 2$ werden wir s bestimmen und eine Formel für die Anzahl der Möglichkeiten angeben.
Für $k = 3$ werden wir für gewisse Konstellation, etwa für $n,\ n+1,\ n+r$ sowohl s bestimmen als auch Formeln für die Anzahl der jeweils möglichen Darstellungen entwickeln.
Abschließend werden wir noch den einfachsten Fall von $k = 4$, nämlich $n,\ n+1,\ n+2,\ n+3$, untersuchen und zumindest für jedes n den Schwellenwert s bestimmen — wobei bestimmen hier natürlich als herleiten/beweisen verstanden werden darf.
Die Situationen, in denen der ggT der n_i nicht 1 ist, lassen sich übrigens, wie wir sehen werden, einfach auf den Fall zurückführen, dass der ggT doch 1 ist.

Wie schon einmal an anderer Stelle muss erwähnt werden, dass das oben dargestellte Frankaturproblem nicht auf den Bereich der Unterhaltungsmathematik beschränkt geblieben ist, sondern dass die Universitätsmathematik sich seiner angenommen und Lösungen entwickelt hat — zumeist in der Form von Rekursionsformeln. Es mag also sein, dass die Ergebnisse dieses Papers sich bereits in der Literatur finden, der Autor, der alle Beweise selbst entwickelt hat, meistens nach den Ideen dreier ehemaliger Schüler des Rosenstein-Gymnasiums, kann nicht sicher ausschließen, dass nicht die Ergebnisse oder auch Beweisansätze vor ihm schon in (ihm nicht zugänglicher) Fachliteratur zu finden sind, sodass er eventuell keine Urheberrechte daran beanspruchen kann (und das deshalb auch nicht tut).

Bevor wir nun in die detaillierten Untersuchungen einsteigen, wollen wir noch rasch den Fall, dass der ggT der n_i nicht 1 ist, klären. Hier gilt nämlich der simple

Satz α:
Es sei $n_1,\ \dots,\ n_k$ ein Set natürlicher Zahlen mit ggt $g > 1$. Dann ist $n_1/g,\ \dots, n_k/g$ ebenfalls ein Set

natürlicher Zahlen, aber mit dem ggT 1.
Für den Schwellenwert $s(n_1, \dots, n_k)$ gilt

$$s(n_1, \dots, n_k) = g \cdot s(n_1/g, \dots, n_k/g)$$

und für die durch g teilbare Zahl x gibt es genau so viele Darstellungen als nichtnegative ganzzahlige Linearkombination der $n_1, \dots, n_k$ wie es nichtnegative ganzzahlige Linearkombinationen der Zahl x/g der Zahlen $n_1/g, \dots, n_k/g$ gibt. (Im Falle, dass x nicht durch g teilbar ist, gibt es selbstverständlich keine ganzzahligen Linearkombinationen der $n_1, \dots, n_k$).

Beweis:

Beide Behauptungen folgen leicht aus der Beobachtung, dass man aus jeder nichtnegativen ganzzahligen Linearkombination von x der Form

$$x = x_1 n_1 + \cdots + x_k n_k$$

eine von x/g der Form

$$x/g = x_1 n_1/g + \cdots + x_k n_k/g$$

machen kann. Die Tatsache, dass die n_i alle durch g teilbar sind, erhält die Ganzzahligkeit, und die Tatsache, dass g positiv ist, die Nichtnegativität der Koeffizienten.

Andererseits wird aus einer ganzzahligen nichtnegativen Linearkombination von

$$y = y_1 n_1/g + \cdots + y_k n_k/g$$

durch Multiplikation mit g eine von

$$yg = y_1 n_1 + \cdots + y_k n_k$$

Da die beiden Prozesse sich gegenseitig umkehren, wird so eine Bijektion zwischen den jeweiligen Mengen möglicher ganzzahliger nichtnegativer Linearkombinationen etabliert, bei der s und s/g als erster Wert auftreten, nach dem die Anzahl der Möglichkeiten nie wieder 0 wird. Das zeigt die ersten beiden Behauptungen.
Die letzte ist trivial. Wenn g der ggt von $n_1, \dots n_k$ ist, dann ist jede ganzzahlige Linearkombination

$$x = x_1 n_1 + \cdots + x_k n_k$$

auch durch g teilbar. ∎

Deshalb gilt ab jetzt die Generalvoraussetzung, dass die k_i den ggT 1 haben.

Und ein zweites Versprechen werden wir sogleich einlösen, nämlich den

Satz β:

Es sei $ggT(n_1, \dots, n_k) = 1$. Dann gibt es stets einen Schwellenwert s, ab dem alle natürlichen Zahlen größergleich s aus den n_i nichtnegativ ganzzahlig linear kombiniert werden können.

Beweis (Induktion nach k):

Den Induktionsanfang setzen wir mit $k = 2$. Dann ist das genau die Aussage des kommenden Satz 1, zu dessen Beweis wir dieses Resultat dann selbstverständlich nicht heranziehen dürfen.

Für den Schritt von k auf $k+1$ haben wir als Induktionsvoraussetzung, dass alle Datensätze mit k natürlichen Zahlen mit ggT 1 einen solchen Schwellenwert besitzen, und mit dem vorher Gezeigten folgt daraus, dass alle Sätze mit k natürlichen Zahlen, deren ggT gleich $g > 1$ ist, einen durch g teilbaren Schwellenwert haben, ab dem alle durch g teilbaren Zahlen als nichtnegative ganzzahlige Linearkombination der n_i darstellbar sind.
Sei also $ggT(n_1, \dots, n_k, n_{k+1}) = 1$. Wir betrachten nun die Menge $\{n_1, \dots, n_k\}$.
Es gibt nun zwei Fälle: Zunächst den, dass $ggT(n_1, \dots, n_k) = 1$ ist. Dann gibt es nach Induktionsvoraussetzung einen Schwellenwert s, ab dem alle natürlichen Zahlen durch $\{n_1, \dots, n_k\}$ nichtnegativ ganzzahlig linear kombinierbar sind, also auch durch $\{n_1, \dots, n_k, n_{k+1}\}$, dieses s ist nicht notwendig die wirkliche

Schranke, sie kann bedeutend niedriger liegen, aber das macht keinen Unterschied.
Im anderen Fall ist $ggT(n_1,\ \ldots,\ n_k) = g > 1$. Dann ist ganz sicher $ggT(g, n_{k+1}) = 1$, denn sonst wäre $ggT(n_1,\ \ldots,\ n_{k+1})$ nicht 1. Ferner gibt es einen Schwellenwert, ab dem alle durch g teilbaren natürlichen Zahlen nichtnegativ ganzzahlig aus $\{n_1,\ \ldots,\ n_k\}$ kombinierbar sind. Unter diesen Zahlen gibt es sicher eine, die mit n_{k+1} den ggT 1 hat (Man nehme eine genügend große Zahl der Form $(xn_{k+1} + 1) \cdot g$). Aus dieser Zahl und aus n_{k+1} lassen sich also ab einem geeigneten Schwellenwert alle natürlichen Zahlen nichtnegativ ganzzahlig linear kombinieren. Da das Vielfache von g aber eine nichtnegative ganzzahlige Linearkombination von $\{n_1,\ \ldots,\ n_k\}$ ist, ist diese jeweilige Linearkombination eine nichtnegative ganzzahlige aus $\{n_1,\ \ldots, n_{k+1}\}$, auch für diesen Datensatz muss es also einen Schwellenwert geben, der allerdings beträchtlich niedriger als der von uns konstruierte ausfallen wird.
Gemäß dem Prinzip der Induktion ist damit alles gezeigt. ∎

Bemerkung:

Der Nachteil des obigen Beweises ist, dass er nicht konstruktiv ist, d.h. dass wir durch den Beweis nicht sagen können, was denn der genaue Schwellenwert s jetzt eigentlich ist. Wir zeigen jeweils nur, dass es ihn gibt, indem wir einen viel größeren Wert angeben, ab dem alle natürlichen Zahlen linear nichtnegativ ganzzahlig linear kombinierbar sind, aber es kann einen viel kleineren Wert geben, ab dem das ebenfalls schon möglich ist. Aber sonst wäre der ganze Spaß ja auch schon vorbei...

Schließlich wollen wir noch einen Gemeinplatz — falls er denn wirklich einer ist — ins Gedächtnis rufen, den der Mathematik-Fachleiter in meinem Referendariat gerne als 'den Hauptsatz der Unterstufenmathematik' bezeichnete, in seiner Formulierung

10 Bäume haben 9 Zwischenräume.

Etwas mathematischer (oder erwachsener) gesprochen: Wenn man eine mit Schrittweite 1 durchnummerierte Menge von Objekten hat, und aus den Randnummern die Anzahl der Objekte bestimmen möchte, muss man beachten, dass die Differenz der höchsten und der niedrigsten Nummer die 'Zwischenräume' zählt, und dass die Anzahl der Objekte stets um 1 mehr ist. Wir werden davon im Text häufigen Gebrauch machen, ohne jedes Mal auf diese Tatsache zu verweisen.

0.1 Technischer Vorspann

0.1.1 Rechnen mit Restklassen

Definition:

$[x]_n := \{\ldots,\ x-3n,\ x-2n,\ x-n,\ x,\ x+n,\ x+2n,\ x+3n, \ldots\}$ heißt die Restklasse von x modulo n.
x ist ein *Repräsentant* der Restklasse, jedes andere Element der Restklasse aber ebenso.
Die Menge aller Restklassen modulo n bezeichnet man als $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Bemerkungen:

1. $[x]_n$ besteht aus allen Zahlen, die bei Teilen durch n den gleichen Rest lassen, daher die Bezeichnung 'Restklasse'.
2. Offensichtlich gilt für zwei beliebige Repräsentanten, dass sie sich rechnerisch um ein Vielfaches von n unterscheiden, und wenn zwei ganze Zahlen sich um ein Vielfaches von n unterscheiden, so liegen sie in der gleichen Restklasse.
3. Trivialerweise gibt es genau n verschiedene Restklassen modulo n.
4. Für Experten sei erwähnt, dass die oben definierten Restklassen auch als die Äquivalenzklassen bezüglich der Äquivalenzrelation auf $\mathbf{Z}$ $x \approx y \iff$ Es gibt ein $k \in \mathbf{Z}$ mit der Eigenschaft, dass $x - y = kn$ ist. verstanden werden können.

Wir werden nun auf der Menge der Restklassen eine Addition und eine Multiplikation einführen.

Definition:

Es seien $[x]_n$ und $[y]_n$ Restklassen modulo n. Dann definieren wir

$$[x]_n + [y]_n = [x+y]_n \qquad\qquad [x]_n \cdot [y]_n = [x \cdot y]_n$$

Lemma A:

Diese beiden Operationen sind wohldefiniert.

Beweis:

Wir müssen für beide Operationen zeigen, dass das Ergebnis nicht von der Wahl der Repräsentanten abhängt, d.h. dass wenn x' und y' weitere Repräsentanten von $[x]_n$ und $[y]_n$ sind, dass dann nach der gegebenen Definition$[x]_n + [y]_n = [x']_n + [y']_n$ und $[x]_n \cdot [y]_n = [x']_n \cdot [y']_n$ ist.
Wenn $[x]_n = [x']_n$ ist (nur dann ist x' ein weiterer Repräsentant, gilt nach dem oben Gesagten $x' - x = kn$ und $y' - y = lm$ mit $l, k \in \mathbf{Z}$, also $x' = x - kn$ und $y' = y - ln$. Dann ist

$$x' + y' = x - kn + y - ln = x + y - (k + l)n \iff (x + y) - (x' + y') = (k + l)n \Rightarrow [x + y]_n = [x' + y']_n$$

und analog

$$x' \cdot y' = (x - kn) \cdot (y - ln) = xy - (xl + yk - kln)n \Rightarrow [x \cdot y]_n = [x' \cdot y']_n$$

Damit ist die Wohldefiniertheit gezeigt. ∎

Bemerkung/Definition:

In praxe wird man stets so reduzieren, also den Repräsentanten so wählen, dass er zwischen 0 und $n - 1$ (jeweils einschließlich) liegt, diesen Repräsentanten nennen wir den *generischen Repräsentanten*. Er wird in einer der kommenden Formeln eine wichtige Rolle spielen.

Im Folgenden werden wir die Struktur der so entstandenen Restklassenringe[1] ein wenig näher beleuchten und dabei auch einen wichtigen Satz der elementaren Zahlentheorie zumindest andeuten, da er an anderer Stelle Verwendung findet. Wir beginnen wieder mit einer

Definition:

(i) Eine Restklasse $[x]_n$ heißt ein *Nullteiler*, wenn $[x]_n$ nicht selbst gleich $[0]_n$ ist, aber es ein $[y]_n \neq [0]_n$ gibt, sodass:

$$[x]_n \cdot [y]_n = [0]_n$$

gilt.

(ii) Eine Restklasse $[x]_n$ heißt eine *Einheit*, wenn es eine (nicht notwendig von $[x]_n$ verschiedene) Restklasse $[y]_n$ gibt, sodass:

$$[x]_n \cdot [y]_n = [1]_n$$

gilt.

Beispiele:

Zum Beispiel ist $[2]_6$ ein Nullteiler, denn $[2]_6 \cdot [3]_6 = [6]_6 = [0]_6$.
Andererseits ist $[5]_6$ eine Einheit, denn $[5]_6 \cdot [5]_6 = [25]_6 = [1]_6$.

Bemerkung:

1. Der berühmte Satz vom Nullprodukt, der aus der (Schul-)Analysis nicht wegzudenken ist, drückt genau aus, dass unser gewöhnlicher Rechenbereich, nämlich die reellen Zahlen, keine Nullteiler besitzt, die tatsächlich mit ihrem Auftreten bezüglich dem Lösen von Gleichungen stets lästige arithmetische Probleme verursachen. Wir haben gesehen, dass die $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$-Rechenbereiche so etwas haben können, wir werden noch sehen, dass das aber glücklicherweise nicht bei allen natürlichen Zahlen n geschieht.

[1] Ein Ring, eine algebraische Struktur mit einer Addition und einer Multiplikation, die eine Reihe algebraisch struktureller Regeln erfüllen müssen, ist ein äußerst wichtiges Konzept der Algebra, wir wollen hier aber in diese Richtung nicht tiefer einsteigen.

2. Wenn $[x]_n$ eine Einheit in $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ ist, dann ist die Restklasse $[y]_n$, die mit $[x]_n$ multipliziert $[1]_n$ ergibt, eindeutig, man nennt sie das Inverse von $[x]_n$ und schreibt sie gern als $[x]_n^{-1}$.
   Wir werden diese Schreibweise gelegentlich verwenden.

Wir werden im Folgenden klären, welche Elemente von $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ Nullteiler und welche Einheiten sind, dazu ist es aber nötig, dass wir zuvor ein zahlentheoretisches Resultat beweisen, dessen Beweis besonders schreibtechnisch ein wenig umständlich ist. Wer eher an Resultaten als an technischen Details interessiert ist, kann den Beweis dieses Sachverhalts ohne großen Verlust übergehen.

Lemma B (Linearkombination des ggT):

Es seien n und m natürliche Zahlen. Dann gibt es ganze Zahlen x und y mit

$$xn + ym = ggT(n, m)$$

Beweis:

Der Beweis entspringt direkt aus dem euklidschen Algorithmus zur Berechnung des ggT. Da Letzterer zumindest zeitweise nicht verbindlicher Schulstoff war, wollen wir ihn hier erläutern, die Argumente, warum er den ggT liefert, aber nur skizzieren.

Der Algorithmus funktioniert so, dass man die größere Zahl, sie sei hier m, durch die kleinere mit Rest teilt:

$$m : n = k_0 \text{ Rest } r_0$$

Dann teilt man n durch r_0

$$n : r_0 = k_1 \text{ Rest } r_1$$

und dieses Verfahren iteriert man, bis die Division schließlich aufgeht. (Das muss irgendwann geschehen, weil die Reste sukzessive kleiner werden, aber immer ganzzahlig nichtnegativ bleiben).

$$r_{i-2} : r_{i-1} = k_i \text{ Rest } r_i$$

$$r_{i-1} : r_i = k_{i+1}$$

Offensichtlich teilt r_i die Zahl r_{i-1} (letzte Division), dann teilt r_i aber auch r_{i-2} (man schreibe die vorletzte Division als Multiplikation und Addition) und damit (gehe gleicherweise mit der vorvorletzten Zeile um) auch r_{i-3} und schließlich n (zweite Zeile) und m (erste Zeile), ist also ein gemeinsamer Teiler von n und m. Andererseits teilt der ggT von n und m diese beiden Zahlen und damit auch r_0 (erste Zeile), damit (zweite Zeile) auch r_1 und so weiter, sodass r_i ein gemeinsamer Teiler von n und m ist, der vom $ggT(n, m)$ geteilt wird, also der ggT selbst.

Nun schreiben wir von unten nach oben, beginnend mit der vorletzten Zeile, die Divisionen um:

$$r_i = r_{i-2} - k_i r_{i-1}$$

Aus der vorletzten Zeile ergibt sich

$$r_{i-1} = r_{i-3} - k_{i-1} r_{i-2}$$

Das setzt man ein:

$$r_i = r_{i-2} - k_i(r_{i-3} - k_{i-1} r_{i-2}) = k_i k_{i-1} r_{i-2} - k_i r_{i-3}$$

und hat so r_i als ganzzahlige Linearkombination von r_{i-2} und r_{i-3} erhalten.

Das iteriert man, bis man r_i, also den ggT, als ganzzahlige Linearkombination von n und m erhalten hat.

$\blacksquare$

Ausgerüstet mit diesem Wissen können wir nun das angekündigte Resultat, das wir hier als Lemma titulieren, das aber durchaus den Rang eines Satzes beanspruchen darf, formulieren.

Lemma C:

(i) $[x]_n \neq [0]_n \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ ist genau dann ein Nullteiler, wenn $ggT(x,n) > 1$.

(ii) $[x]_n \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ ist genau dann eine Einheit, wenn $ggT(x,n) = 1$.

Beweis: (ii) Sei zunächst $[x]_n$ eine Einheit in $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Dann gibt es also $[y]_n \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, sodass

$$[x]_n \cdot [y]_n = [1]_n$$

Das bedeutet, dass $x \cdot y - kn = 1$ ist, mit ganzem k. Der ggT von n und x teilt beide Summanden auf der linken Seite, also teilt er auch die rechte Seite. Also ist der $ggT(x,n)$ ein Teiler von 1 und somit 1 selbst.
Sei nun andererseits $ggT(x,n) = 1$. Dann gibt es nach dem vorausgeschickten Lemma B ganze Zahlen i und j mit

$$ix + jn = 1$$

Wir reduzieren modulo n und erhalten

$$[ix + jn]_n = [ix]_n + [jn]_n = [ix]_n = [i]_n \cdot [x]_n = [1]_n$$

und $[x]_n$ ist als Einheit erkannt.

(i) Sei zunächst $[x]_n$ ein Nullteiler in $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Dann gibt es $[y]_n \neq [0]_n$ in $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ mit

$$[x]_n \cdot [y]_n = [0]_n$$

Nehmen wir an, der $ggT(x,n)$ wäre 1. Dann wäre nach (ii) $[x]_n$ eine Einheit, es gäbe also ein $[z]_n \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ mit $[x]_n \cdot [z]_n = [1]_n$. Damit multiplizieren wir die Nullteilerbedingung

$$[x]_n \cdot [y]_n = [0]_n \quad | \cdot [z]_n \qquad \Rightarrow [x]_n \cdot [y]_n \cdot [z]_n = [0]_n \cdot [z]_n$$

Das liefert sofort

$$[x]_n \cdot [z]_n \cdot [y]_n = [1]_n \cdot [y]_n = [y]_n = [0]_n$$

Ein direkter Widerspruch, also muss der $ggT(x,n)$ größer als 1 sein.
Sei andererseits $g = ggT(x,n) > 1$. Dann ist n/g ganz und kleiner als n, also ist $[n/g]_n \neq [0]_n$. Ferner gilt:

$$[n/g]_n \cdot [x]_n = [n/g \cdot x]_n = [n \cdot x/g]_n = [0]_n$$

(Man beachte, dass auch x/g eine ganze Zahl ist).
Somit ist $[x]_n$ ein Nullteiler in $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. ∎

Korollar:
Sei $[x]_n \neq [0]_n$. Dann ist $[x]_n$ entweder ein Nullteiler oder eine Einheit.

Beweis:
Das folgt unmittelbar aus dem Lemma, denn entweder ist $ggT(x,n) = 1$, dann ist $[x]_n$ eine Einheit, oder es ist $ggT(x,n) > 1$, dann ist $[x]_n$ ein Nullteiler. ∎

Bemerkung:
Das Korollar hat zur Folge, dass $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ genau dann keine Nullteiler hat, wenn n eine Primzahl ist. In diesem Falle ist jedes von $[0]_n$ verschiedene Element eine Einheit und $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +, \cdot)$ ein endlicher Körper der Elementezahl und Charakteristik n. (Das nur für die Experten, wir werden es in keiner Weise verwenden).

Wir schließen nun noch einen Sachverhalt als Lemma an, den wir in den Sätzen mit geradzahliger Nummer immer wieder verwenden werden, ohne ihn dort ausführlich zu begründen.

Lemma D:
Die Anzahl ganzer Zahlen zwischen (je einschließlich) 0 und k, die gleich p modulu n sind (p ist der generische Repräsentant) beträgt

$$\left[\frac{k-p}{n}\right] + 1 = \left[\frac{k+n-p}{n}\right]$$

Beweis:

Wir zeigen dies zunächst für die Zahlen zwischen 0 und $n-1$.
Falls $k<p$ ist, gibt es keine solchen Zahlen und die Formel liefert $[-0,...]+1=-1+1=0$.
Falls $p\le k\le n-1$ ist, gibt es genau eine solche Zahl und die Formel liefert $[0,...]+1=1$.
In beiden Fällen stimmt die Formel also. Falls nun $k\ge n$ ist, kann man $k=in+t$ schreiben, mit $i\ge 1$ und $0\le t\le n-1$.
Dann gibt es in jedem Bereich $jn,\dots,(j+1)n-1$ genau eine solche Zahl; zwischen in und $in+t$ gibt es genau dann eine, wenn es zwischen 0 und t eine gibt. Es gibt also $i+\left[\frac{t-p}{n}\right]+1$ viele Möglichkeiten. Das ergibt auch $\left[\frac{ni+t-p}{n}\right]$, also stimmt der linke Term unserer Formel stets.
Die Übereinstimmung des linken und rechten Terms ist trivial.

0.1.2 Schreib- und Sprechweisen

In diesem letzten Abschnitt, bevor wir uns der eigentlichen Mathematik zuwenden, wollen wir kurz diverse Schreib- und Sprechweisen einführen und erklären, die sonst zu Missverständnissen führen könnten:

1. Restklassen:
   Diese sind oben schon definiert und verwendet worden. Wir schreiben sie mit eckigen Klammern und tiefgestelltem 'Teiler' (der Zahl, bei der die Reste entstehen, wenn man durch sie teilt). Wenn man diese Reste verbal ansprechen möchte, sagt man z.B. *'der Rest von 17 modulo 5'* oder kürzer *'17 modulo 5'*. Wenn man die Restklasse auf den generischen Repräsentanten reduziert (sogar wenn man sie durch einen ganz anderen vertritt, was hier aber selten vorkommt), sagt man wieder sehr kurz *'17 modulo 5 ist 2'*, was äquivalent zu der Aussage ist, dass 17 beim Teilen durch 5 den Rest 2 lässt oder dass $[17]_5=[2]_5$ gilt.

2. Gauß-Klammern:
   In vergangenen Skripten haben wir die Verwendung von Gaußklammern wegen ihrer arithemtischen Sperrigkeit tunlichst vermieden. Das wird bei diesem Thema leider nicht mehr möglich sein. Unglücklicherweise schreiben auch sie sich mit eckigen Klammern, allerdings ohne tiefer gestellte Zahl, also $[x]$.
   Wenn x eine reelle Zahl ist, dann ist $[x]$ die nächstgelegene ganze Zahl zu x, die nicht größer ist als x. Das stellt eine sprachlich korrekte Definition dar. Gebräuchlich ist die Beschreibung 'die nächstkleinere ganze Zahl', die viel anschaulicher ist. Das Problem ist aber, dass nach ihr $[3]=2$ sein müsste; vielmehr ist aber $[3]=3$, was die obige Formulierung liefert.
   Eine sehr anschauliche Vorstellung der Gaußklammer erhält man, wenn man sich x als Dezimalbruch vorstellt. Dann tut $[x]$ nämlich nichts weiter, als alle Nachkommastellen zu tilgen. (Bei $x=3$ werden dann eben unendlich viele Nullen gelöscht).

3. Linearkombinationen:
   Dieser Begriff ist aus der Analytischen Geometrie eventuell vertraut, dort betrifft er Vektoren. Wir werden ihn hier allgemeiner fassen.
   Wenn $x_1,\ \dots,x_k$ irgendwelche Objekte sind, die addiert werden können und mit Zahlen multipliziert werden können, so betrachtet man jeden Ausdruck der Form

   $$r_1x_1+r_2x_2+\cdots+r_kx_k$$

   wobei die r_i reelle Zahlen (in der Universitätsmathematik wird dies ebenfalls wesentlich weiter als 'Elemente eines Rings' gefasst) sind, als eine *Linearkombination* der Elemente. Das Wort linear steht dafür, dass eben nur Vielfache der Elemente verwendet werden dürfen (nicht etwa Quadrate von ihnen oder gar Komplexeres) und dass anschließend nur addiert (wegen $a-b=a+(-1)\cdot b$ natürlich auch subtrahiert) werden dürfen. Will man nicht alle Elemente verwenden — die obige Schreibweise scheint zu suggerieren, dass man das müsse —, so setzt man einfach den entsprechenden Koeffizienten gleich 0.
   Das etwas Verwirrende im Folgenden wird sein, dass auch die Elemente x_i Zahlen, sogar natürliche Zahlen sind. Aber wir setzen ja nur voraus, dass man sie mit reellen Zahlen multiplizieren und addieren kann, und das kann man mit Zahlen selbstverständlich.
   Wenn wir von einer ganzzahligen Linearkombination sprechen, so bezieht sich das allein auf die Koeffizienten

r_i, die dann eben ganze Zahlen sein müssen.
Sprechen wir von einer nichtnegativen ganzzahligen Linearkombination, so müssen alle Koeffizienten r_i ganze Zahlen größergleich 0 sein.

4. Zusammenhang zum Frankaturproblem:
Wenn wir uns vorstellen, nur drei Frankaturwerte (also nur Briefmarken mit insgesamt 3 verschiedenen Werten) zur Auswahl zu haben, sagen wir hier konkret 3, 6 und 10, dann sieht jede Frankatur so aus:
$$3 + 3 + \cdots + 3 + 6 + 6 + \cdots + 6 + 10 + 10 + \cdots + 10$$
wobei auch gewisse Werte gar nicht oder in geringerer Stückzahl vorkommen können als es diese Schreibung suggeriert. Das ist dann eine konkrete Frankatur, und die Anzahl der Summanden bezeichnen wir als Stückzahl (der zu klebenden Briefmarken). Wir können das aber auch deutlich zusammenfassen:
$$y_1 \cdot 3 + y_2 \cdot 6 + y_3 \cdot 10$$
Und schon haben wir eine nichtnegative (es konnten zwar *keine* 6-Cent-Marken geklebt werden, aber sicher nicht eine negative Anzahl, und halbe Briefmarken kann man zwar kleben (Ähnliches wurde teilweise als Code für den Inhalt, z.B. bei Liebesbriefen, gemacht, aber Frankaturwert hatte das nicht[2], kann also getrost ignoriert werden, sodass der letzte Term eine nichtnegative ganzzahlige Linearkombination der Werte 3, 6 und 10 ist. Die Anzahl berechnet sich hier zu $y_1 + y_2 + y_3$, das werden wir noch ausführlich verwenden.
Man kann sich leicht davon überzeugen, dass die Menge möglicher Frankaturen so zu der Menge der nichtnegativen ganzzahligen Linearkombinationen in Bijektion steht, weshalb wir später ohne großen Kommentar zwischen diesen beiden Vorstellungen hin und her gehen werden.

5. Kleinheitsunfälle:
Als Kleinheitsunfall bezeichnet man in der Zahlentheorie und in verwandten Gebieten den Effekt, dass Ergebnisse, meist Formeln, ausgerechnet für kleine Werte nicht richtig sind. Um davon sprechen zu können, ist es unerlässlich, dass die Formel/Aussage ab einem gewissen n für alle Zahlen gilt und nur für endlich viele kleine Werte von n Ausnahmen hat, eben die Kleinheitsunfälle.

6. Rechtschreibung:
Zuletzt weisen wir daraufhin, dass wir gewisse mathematische Spezialwörter, hier hauptsächlich 'nichtnegativ' und 'größergleich/kleinergleich' abweichend von den Regeln der deutschen Rechtschreibung in einem Wort schreiben, weil die mathematische Bedeutung dem besser entspricht (und damit, wenn z.B. 'nichtnegativ' negiert werden muss, nicht mathematisch missverständliche Formulierungen entstehen). [3]

1 Zwei Marken ($k = 2$)

In diesem Abschnitt werden wir für den Fall, dass es nur zwei verschiedene Zahlen (Markenwerte) n und m gibt, eine handliche Formel für den Schwellenwert s und eine etwas komplexere für die jeweilige Anzahl möglicher Linearkombinationen erhalten, diese wird zwar explizit ausfallen, aber Restklassenrechnung involvieren, auf die wir hier, weil sie nur in diesem Kapitel auftritt, nur sehr oberflächlich eingehen wollen.
Der Schlüssel für den Schwellenwert wird in dem nachfolgenden Lemma bestehen:

Lemma E:

(i) Es seien
$$x = x_1 n + x_2 m = y_1 n + y_2 m$$
zwei verschiedene ganzzahlige Linearkombinationen der ganzen Zahl x. Dann gibt es eine ganze Zahl k, für die gilt: $x_2 = y_2 + km$ und $x_1 = y_1 - kn$.

[2] außer in der Frühzeit der Philatelie Mitte bis Ende des 19. Jahrhunderts
[3] Seitdem ich kein Deutschlehrer mehr bin, darf ich das... grins! Im Ernst: Fachsprachen haben schon immer geringfügig abweichende Regeln gehabt!

(ii) Es sei

$$x = x_1 n + x_2 m \quad \text{und} \quad x + nm = y_1 n + y_2 m$$

Dann gibt es ein $k \in \mathbf{Z}$ mit

$$y_2 = x_2 + kn \quad \text{und} \quad y_1 = x_1 + (1-k)m$$

Beweis:

(i)

Sei also

$$x = x_1 n + x_2 m = y_1 n + y_2 m$$

Wir gehen zu den Restklassen modulo n über. Dann ergibt sich:

$$[x_1 n + x_2 m]_n = [y_1 n + y_2 m]_n \Rightarrow [x_2 m]_n = [y_2 m]_n \iff [(x_2 - y_2)m]_n = [0]_n$$

Da der $\mathrm{ggt}(n, m)$ 1 ist, ist $[m]_n$ eine Einheit in $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, \cdot)$, also folgt

$$[x_2 - y_2]_n = [0]_n \iff x_2 = y_2 + kn$$

Daraus ergibt sich

$$x_1 n + (y_2 + kn)m = x_2 n + y_2 m \iff x_1 n = x_2 n + knm \iff x_2 = x_1 - km$$

(ii)

Wir setzen also an:

$$x = x_1 n + y_1 m \quad \text{und} \quad x + nm = y_1 n + y_2 m$$

Dann ist

$$[x]_n = [x_2 m]_n \quad \text{und} \quad [x + nm]_m = [y_2 m]_n$$

und es folgt wie in (i), dass $y_2 = x_2 + kn$ ist. Setzt man das ein, ergibt sich aus

$$nm = (y_1 - x_1)n + (y_2 - x_2)m = (y_1 - x_1)n + knm$$

sofort

$$(y_1 - x_1)n = (1-k)nm \iff y_1 = x_1 + (1-k)m$$

Damit ist alles gezeigt. ∎

Bemerkungen:

(1) Selbstverständlich kann man die Aussage von (ii) auf den Fall $x + znm$ iterieren.

(2) Die Bedeutung von (i) besteht darin, dass man, wenn man eine ganzzahlige Linearkombination kennt, jede weitere mögliche dadurch erzeugen kann, dass man Vielfache von nm zwischen den beiden Summanden hin- und herschiebt.
Da trivialerweise jede solche neue Linearkombination ganzzahlig ist und auch x ergibt, muss es eine mögliche Linearkombination $x = x_1 n + x_2 m$ geben, in der $0 \le x_1 \le m - 1$ gilt, und eine, nicht notwendig die gleiche, in der $0 \le x_2 \le n - 1$ gilt, denn die möglichen x_i sind nur bis auf ihren Rest modulo n bzw. modulo m bestimmt, und einer der beiden Koeffizienten kann innerhalb der richtigen Restklasse frei gewählt werden.

(3) Und (ii) sagt aus, dass wenn sich zwei x-Werte um nm unterscheiden, dann erhält man jede Linearkombination des größeren x-Werts, indem man zu einer geeigneten Linearkombination von x (dem kleineren der beiden Werte) nm addiert, also entweder x_1 um m oder x_2 um n erhöht.

1.1 Der Schwellenwert bei $k = 2$

Wie man weiß, garantiert die ganzzahlige Darstellbarkeit des ggT stets, dass es eine ganzzahlige Linearkombination aus n und m für jede Zahl x gibt. Das Problem besteht also einzig und allein in der Nichtnegativität der Koeffizienten. Darum wird alles kreisen im nachfolgenden

Satz 1:
Es sei $n < m$ und $ggt(n, m) = 1$. Dann ist der Schwellenwert $s = s(n, m) = (n - 1)(m - 1)$.

Beweis:
Wir haben hier zweierlei zu zeigen. Erstens, dass ab s alle natürlichen Zahlen als nichtnegative ganzzahlige Linearkombination von n und m darstellbar sind, zweitens, dass die Zahl $(n-1)(m-1)-1 = nm-n-m$ *nicht* als nichtnegative ganzzahlige Linearkombination von n umd m darstellbar ist.

Beginnen wir mit Letzterem: Dazu betrachten wir $s - 1 - nm = -n - m = (-1) \cdot n + (-1) \cdot m$. Wegen (ii) aus dem Lemma haben dann alle Darstellungen von $s - 1$ die Form

$$s - 1 = ((-1) + kn) \cdot m + (-1 + (1 - kn)) \cdot m$$

Damit der Koeffizient vor m positiv ist, muss $k \geq 1$ sein. Dann ist aber der Koeffizient $(-1 - (1 - k))$ vor der Zahl n negativ, sodass es unmöglich ist, $s - 1$ mit *zwei* nichtnegativen Koeffizienten darzustellen.

Um nun zu zeigen, dass alle Werte ab s darstellbar sind, genügt es zu zeigen, dass die Werte $s,\ s+1,\ \ldots, s+n-1$ darstellbar sind. Für $s + n,\ \ldots, s + 2n - 1$ nehmen wir dann die vorige Darstellung und addieren 1 auf den Koeffizienten vor n, wodurch dieser sicher nichtnegativ bleibt, und so weiter.
Wir betrachten wieder die um nm verminderten Werte $-n-m+1,\ \ldots, -m$. Sei $y \neq -m$ einer von ihnen. Nach dem Satz über die Linearkombination des ggT hat 1, und damit jede ganze Zahl, eine Darstellung als ganzzahlige Linearkombination aus n und m. Es gibt also sicher ganzzahlige y_1 und y_2 mit

$$y_1 n + y_2 m = y$$

Da die Ergebnisse y allesamt negativ sind, können nicht beide Koeffizienten positiv sein. Da das Resultat $y > -n - m$ ist, können auch nicht beide negativ sein. Von allen möglichen Darstellungen wählen wir nun diejenige mit dem kleinstmöglichen positiven y_1. Dann muss $0 \geq y_2 > -n$ sein. Wäre nämlich $y_2 < -n$, so könnten wir y_2 um n erhöhen und es bliebe negativ und y_1 gleichzeitig um m erniedrigen und es müsste positiv bleiben, im Widerspruch zu seiner Minimalität. Ist aber $y_2 = -n$, so hat der um nm erhöhte Wert eine Darstellung mit einem positiven Koeffizienten und der andere ist 0.
Gehen wir aber nun wiederum zum ursprünglichen um nm höheren Wert und schlagen dieses $+nm$ auf den Koeffizienten y_2, so müssen wir bei ihm n addieren, er wird also positiv.
Somit ist jede der Zahlen $nm-n-m+1,\ \ldots, nm-m-1$ als nichtnegative ganzzahlige Linearkombination von n und m darstellbar und $nm - m$ ist wegen $nm - m = (n - 1) \cdot m + 0 \cdot n$ auch eine nichtnegative ganzzahlige Linearkombination von m und n.
Damit ist alles gezeigt. ∎

Bemerkung:
Und das ist auch in dem Randfall, dass $n = 1$ ist, korrekt, laut Formel ist dann $s = 0$, und selbstverständlich lässt sich mit einem Markensatz, der den Wert 1 enthält, jeder ganzzahlige Wert frankieren.

1.2 Zahl der Möglichkeiten bei $k = 2$

Die Formel, die die Anzahl der Möglichkeiten, die Zahl x aus n und m nichtnegativ ganzzahlig linear zu kombinieren, ist relativ direkt, enthält aber ein rechnerisch etwas eigenwilliges Vorgehen, das wir zunächst erklären wollen.

Definition:

Es sei $[x]_n$ eine Restklasse modulo n. Dann ist $[x]_n^*$ ihr generischer Repräsentant, d.h. derjenige ihrer Repräsentanten, der (je einschließlich) zwischen 0 und $n-1$ liegt.

Bemerkung:

Das ist wohldefiniert, denn wenn x ein Repräsentant ist, sind alle anderen Repräsentanten $x + zn$ ($z \in \mathbf{Z}$), im Bereich $0, \ldots, n-1$ liegt also genau einer dieser Repräsentanten.

Satz 2:

Es sei $n \le m$ und $ggt(n, m) = 1$. Dann gibt es für $x \in \mathbf{N}$ genau

$$\left[\frac{x - m\left([x]_n \cdot [m]_n^{-1}\right)^*}{nm} + 1 \right]$$

Möglichkeiten, x aus n und m nichtnegativ ganzzahlig linear zu kombinieren.

Beweis:

Es ist klar, dass x in jedem Fall ganzzahlig linear kombinierbar ist, dass es also ganzzahlige Lösungen x_1 und x_2 gibt, mit

$$x = x_1 n + x_2 m$$

Aus dem bisher Bewiesenen ist auch klar, dass die Restklasse von x_2 modulo n eindeutig festliegt. Das wollen wir nun rechnerisch erhärten:

$$[x]_n = [x_1 n + x_2 m]_n \iff [x]_n = [x_2]_n \cdot [m]_n$$

Da $ggt(n, m) = 1$, ist $[m]_n$ eine Einheit in $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, \cdot)$, also existiert ein Inverses. Damit gilt

$$[x_2]_n = [x]_n \cdot [m]_n^{-1}$$

Nun müssen ja x_2 und x_1 nichtnegativ sein, also ist die kleinste Möglichkeit für x_2 genau gleich $\left([x]_n \cdot [m]_n^{-1}\right)^*$. Damit gilt für das dazu passende x_1

$$x_1 = \frac{x - \left([x]_n \cdot [m]_n^{-1}\right)^* \cdot m}{n}$$

Sollte diese Zahl negativ sein, gibt es keine Möglichkeiten.
Ist sie positiv, gibt es mindestens diese eine Möglichkeit. Da x_2 nicht verkleinert werden kann, kann es laut dem Lemma nur um kn vergrößert werden und damit müsste x_1 um km verkleinert werden, ohne negativ zu werden. Dafür gibt es genau $\left[\frac{x_1}{m}\right]$ Möglichkeiten. Zusammen mit der Möglichkeit, die wir schon haben, ergeben sich dann genau

$$\left[\frac{x - m\left([x]_n \cdot [m]_n^{-1}\right)^*}{nm} + 1 \right]$$

Möglichkeiten. (Man beachte, dass im Falle, dass x_1 mit dem generischen Repräsentanten für x_2 negativ wird, der linke Summand in der Gaußklammer echt zwischen 0 und -1 ist, die Formel also den korrekten Wert 0 liefert.
Damit ist alles gezeigt. ∎

Bemerkung:

Wenn, wie wir gesehen haben, Satz 2 die Anzahl möglicher nichtnegativer ganzzahliger Linearkombinationen von x in dem Fall, dass es keine gibt, korrekt mit 0 angibt, dann müsste es möglich sein, Satz 1 auch mit Hilfe des Satzes 2 — der zu seinem Beweis den Satz 1 nicht nötig hat — zu beweisen. In der Tat ist das so, und wir wollen kurz andeuten, wie das vonstatten geht:

Wir müssen nach wie vor zeigen, dass einerseits s bis $s+n-1$ als nichtnegative ganzzahlige Linearkombination möglich sind, die Zahl $s-1$ hingegen nicht.
Wir beginnen wieder mit dem Letzteren und betrachten unsere Anzahlformel für $x = nm-n-m$:

$$\left[\frac{nm-n-m-m\left([nm-n-m]_n\cdot[m]_n^{-1}\right)^*}{nm}+1\right] = \left[\frac{nm-n-m-m\left([-m]_n\cdot[m]_n^{-1}\right)^*}{nm}+1\right]$$

$$= \left[\frac{nm-n-m-m\left([-1]_n\right)^*}{nm}+1\right]$$

Der generische Repräsentant für $[-1]_n$ ist $n-1$, also haben wir

$$= \left[\frac{nm-n-m-m(n-1)}{nm}+1\right] = \left[\frac{-1}{m}+1\right] = 0$$

Es gibt also keine nichtnegative ganzzahlige Linearkombination für $s-1$.
Betrachten wir nun die Zahlen $x = s,\ldots,s+n-2$. Wir halten hier sofort fest, dass sie alle eine andere Restklasse modulo n haben als $s-1$. Damit ist auch die Restklasse $[x]_n\cdot[m]_n^{-1}$ eine andere als bei unserer vorherigen Rechnung (man beachte, dass $[m]_n^{-1}$ auch eine Einheit ist $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z},\cdot)$ ist, also ist die Multiplikation mit $[m]_n^{-1}$ durch die mit $[m]_n$ umkehrbar), es kann also nicht die Restklasse $[-1]$ in der Formel auftreten, und das bedeutet, dass der generische Repräsentant kleiner oder gleich $n-2$ sein muss. Wir haben also

$$\left[\frac{nm-n-m+k-m\left([nm-n-m+k]_n\cdot[m]_n^{-1}\right)^*}{nm}+1\right] \geq \left[\frac{nm-n-m+k-m\,(n-2)}{nm}+1\right] = \left[\frac{-n+m+k}{nm}+1\right]$$

Und da $n<m$, ist der Bruch positiv (zwischen 0 und 1), das Ergebnis der Formel also 1, es gibt also eine nichtnegative ganzzahlige Linearkombination. Die Linearkombination für $nm-m$ gibt man wieder ad hoc an.

2 Einige Bemerkungen zum Fall $k=3$

2.1 Der Datensatz $n,\ n+1,\ n+i\ (i\geq 2)$

Die bei den Beweisen von jeweils einer Hälfte der kommenden Sätze verwendete 'Listenmethode' ist eine Weiterentwicklung durch den Autor eines von drei ehemaligen Schülern, Franz Hohler, Stefan Schreier und Tobias Schweizer, eingebrachten Verfahrens und hat deshalb unsere vier Namen erhalten. Falls das Verfahren vorher schon einmal in der — uns nicht zugänglichen — Fachliteratur angewendet worden sein sollte, so sei auch hier gesagt, dass auch mit der Benennung kein offizieller Anspruch auf juristische Urheberschaft verbunden ist.

2.2 Der Datensatz $n,\ n+1,\ n+i$ mit $i\geq 2$

Wir wollen dem Abschnitt einen Prolog vorausschicken.

1. **Allgemeines Vorgehen:**
   Wir werden im Folgenden stets in einem (insgesamt) dreischrittigen Verfahren vorgehen: Die beiden ersten Schritte etablieren den Schwellenwert, der dritte Schritt die Anzahl jeweiliger Möglichkeiten. (Es mag durchaus sein, dass aus dem Resultat des 3. Schritts das Resultat des ersten Schritts gefolgert werden kann, doch ist die Lage hier nicht so klar wie beim Fall $k=2$, weswegen wir meistens die Existenz mindestens einer Linearkombination voraussetzen, um die Gesamtzahl zu bestimmen).
   Im ersten Schritt werden wir eine Liste erstellen, die zeigt, dass beginnend mit dem Schwellenwert s mindestens so viele Zahlen in direkter Reihenfolge nichtnegativ ganzzahlig linear aus dem Datensatz kombiniert werden können, wie der kleinste Wert des Datensatzes ist. Ist dem nämlich so, sind ab s alle Zahlen kombinierbar, für die größeren muss man nur mehr von den kleinen Summanden verwenden. Von dieser Tatsache

werden wir nicht immer großes Aufsehen machen. Die Liste gibt jeweils die Koeffizienten für die Linearkombination an, dabei ist stets nachzuweisen, dass der Beginn der Liste wirklich s ergibt, und dass der Anstieg der Summe der Linearkombination pro Zeile immer $+1$ beträgt. Diese Methode geht auf drei ehemalige Schüler, Franz Hohler, Stefan Schreier und Tobias Schweizer zurück und wurde vom Autor nachträglich nur, allerdings nicht unwesentlich, verallgemeinert.
Im zweiten Schritt werden wir jeweils zeigen, dass die Zahl $s-1$ aus dem gegebenen Datensatz *nicht* mit nichtnegativen ganzen Koeffizienten linear kombiniert werden kann. Dabei werden wir stets nach der Anzahl der Summanden (Briefmarken) unterscheiden. Verwendet man zu viele davon, wird die Summe nämlich zu groß, verwendet man zu wenige, wird sie zu klein, und in einem Grenzbereich, für eine, höchstens zwei konkrete Anzahlen, benötigt man andere Argumente, entweder, dass die angenommene Linearkombinierbarkeit zu Widersprüchen zu den schon bewiesenen Resultaten über zweielementige Datensätze führt, oder dass die Gerade-ungerade-Parität verletzt ist.
Der dritte Schritt wird jeweils eine Summenformel für die Anzahl der Möglichkeiten ergeben, wobei wir wiederum nach der Anzahl der verwendeten Summanden parametrisieren. Diese Summe ist stets endlich, das sich leicht eine notwendige Ober- und Untergrenze für die Anzahl angeben lässt. Anschließend haben wir noch zwei Parameter in der anzusetzenden Gleichung, die aber durch eine diophantische Gleichung bijektiv aufeinander bezogen sind, sodass wir nur die Anzahl der Möglichkeiten für einen der beiden zählen müssen. (Für welchen, dabei wechseln wir einmal das prinzipielle Vorgehen, je nachdem, welche Wahl günstiger erscheint). Dieser Parameter ist dann einerseits, damit alle Koeffizienten nichtnegativ sind, in seiner Größe beschränkt, und andererseits muss er gemäß eines bestimmten Divisors die richtige Restklasse haben, Lemma D liefert hier die richtige Zahl.

2. **Technische Probleme:**
Die mathematischen Probleme sind mit dem obigen Vorgehen gelöst. Die z.T. rein rechentechnischen nehmen aber zu, obwohl wir es genau genommen stets mit Polynomen vom Grad 2 (Grad hier wirklich auch bei mehreren Variablen als höchste vorkommende Potenz interpretiert, die Exponentensumme ist aber auch nur maximal 3) zu tun hat. Folgendes ist zu beachten:

   (a) Die Formel(n) splitten auf nach der Restklasse der Differenz zwischen größtem und kleinsten Summanden.

   (b) Falls der minimale Abstand der Summanden 1 ist, gibt es eine Serie von Formeln und eventuell eine Ausnahmerestklasse.
   Falls der minimale Abstand der Summanden 2 ist, gibt es zwei Serien (gerade/ungerade Restklassen) und in einer Serie 2 Ausnahmerestklassen.
   Es wäre interessant zu sehen, wie sich das bei größerem Minimalabstand fortsetzt.

   (c) Die richtigen Einträge für die Liste zu finden, ist durchaus problematisch — in einfachen Fällen füllt diese sich nahezu von selbst aus, in komplexeren bedarf es einigen Ausprobierens, zumal bis zu 3 Variablen im Spiel sind. Und dann geht das Rechnen evtl. richtig los ...

   (d) Die Formel für die Anzahl der Möglichkeiten ist alles andere als übersichtlich. In praxe kann eine direkte Bestimmung mit gutem Probieren evtl. nicht unterlegen sein.

Und nun geht es in medias res:

2.2.1 Der Datensatz $\{n,\ n+1,\ n+i\}$: der Schwellenwert s

Wir beginnen sofort mit dem

Satz 3:
Sei $n = ki + t$ und $k \geq i - 3$, dann lautet der Schwellenwert s für den oben angegebenen Datensatz:

(i)
$$s = ik^2 + (i(i-2) + t)k + (i-3)t \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq i-2$$

(ii)

$$s = ik^2 + (i(i-2) + i - 1)k + (i-1)(i-2) \quad \text{für} \quad t = i - 1$$

Beweis: (i) Sei also t der generische Repräsentant von $[n]_i$ und dabei sei $0 \leq t \leq i-2$.
Wir beginnen mit dem Schritt, der zeigt, dass ab s alle natürlichen Zahlen aus dem Datensatz nichtnegativ ganzzahlig linear kombinierbar sind. Dazu schreiben wir $n = ik + t$ und halten wieder fest, dass es genügt, wenn wir zeigen können, dass s und die nächsten $n-1$, also $ik + t - 1$ natürlichen Zahlen nichtnegativ ganzzahlig linear kombinierbar sind, denn ab dann vergrößern wir einfach die Zahl der n-Summanden um 1 (oder später mehr).
Dazu geben wir eine passende Liste an:

$ik+t$	$ik+t+1$	$ik+t+i$
$i-3$	0	k
$i-4$	1	k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$i-3$	k
$k+i-2$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$k+i-2$	0
$i-2$	$k-1$	1
$i-3$	k	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$k+i-3$	1
$i-2$	$k-2$	2
$i-3$	$k-1$	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$k+i-4$	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$i-2$	0	k
$i-3$	1	k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$i-2$	k

Zur Erinnerung: Jede Zeile entspricht der Linearkombination $x_1(ik+t)+x_2(ik+t+1)+x_3(ik+t+i)$, wobei die x_i genau die Werte sind, die in der entsprechende Spalte stehen. arüber hinaus ist diese Liste en detail stark erklärungsbedürftig. Sie zerfällt offensichtlich in 3 Bereiche, die durch Doppellinien voneinander abgegrenzt sind; der letzte Bereich zerfällt wiederum in mehrere, durch einfache Linien voneinander abgegrenzte Teilbereiche.
Die wichtigste Bemerkung gleich vorneweg: Der erste Bereich existiert nur für $t > 0$, für $t = 0$ beginnt die Liste mit dem zweiten Bereich.
Kümmern wir uns nun darum, ob die erste Zeile jeweils wirklich den Wert s liefert. Für $t = 0$ ist dieser $ik^2 + (i(i-2)k$. Die entsprechende Anfangssumme ist

$$(k + i - 2) \cdot ik = ik^2 + (i-2)ik = s$$

Für $t = 0$ beginnen wir also mit der richtigen Zahl.
Für $t > 0$ ist der Schwellenwert $s = ik^2 + (i(i-2+t)k + (i-3)t$. Die Anfangssumme liefert

$$(i-3)(ik+t) + k(ik+t+i) = i^2k - 3ik + it - 3t + ik^2 + kt + ik = ik^2 + (i^2 - 2i + t)k + it - 3t$$

$$= ik^2 + (i(i-2)+t)k + (i-3)t = s$$

Also wird in jedem Fall der richtige Anfangswert, nämlich s, erzielt.

Als nächstes müssen wir sicherstellen, dass die erziele Summe von Zeile zu Zeile um 1 größer wird: Das ist innerhalb des ersten Bereichs (so er existiert), selbstverständlich, da pro Zeile ein n-Summand durch einen $n+1$-Summanden ersetzt wird, das Ergebnis der Summation steigt also jeweils um $+1$. Das Gleiche gilt innerhalb des zweiten Bereichs und im dritten Bereich innerhalb jedes Teilbereichs. Wir müssen also jeweils die Übergänge kontrollieren. Am schwierigsten einzusehen ist der Übergang vom ersten Bereich (falls er denn existiert) zum zweiten Bereich, da hier komplett umgebaut wird. Wir rechnen daher einfach die jeweiligen Summen aus, dann werden wir sehen, ob sie sich um 1 unterscheiden.
Die letzte Summe des ersten Bereichs liefert

$$(i-3-(t-1))(ik+t)+(t-1)(ik+t+1)+k(ik+t+i) = i^2k+it-2ik-2t-itk-t^2+ikt-ik+t^2-1+ik^2+kt+ki$$

$$= i^2k + it - 2ik - 2t - 1 + ik^2 + kt = ik^2 + (i(i-2)+t)k + (i-2)t - 1$$

Die erste Summe des zweiten Bereichs hingegen liefert

$$(k+i-2)(ik+t) = ik^2 + (i(i-2)+t)k + (i-2)t$$

und das ist tatsächlich genau um 1 mehr als die vorige Summe.
Die Übergänge vom 2. Bereich und die innerhalb des dritten Bereichs zeichnen sich immer durch folgendes Vorgehen aus: Ein $n+1$-Summand wird durch einen $n+i$-Summanden ersetzt, und gleichzeitig werden $i-2$ der $n+1$-Summanden durch n-Summanden ersetzt. Die erste Ersetzung vergrößert die Summe um $n+i-(n+1) = i-1$, jede der anderen Ersetzungen vermindert die Summe um 1, insgesamt also um $(i-2)\cdot 1 = i-2$. Das bedeutet, dass sich die gesamte Summe um $(i-1)-(i-2) = +1$ ändert, genau so, wie es sein soll.
Also haben wir eingesehen, dass die erzielte Summe pro Zeile um $+1$ zunimmt.

Als nächstes müssen wir sicherstellen, dass alle aufgeführten Koeffizienten nichtnegativ sind — ganzzahlig sind sie trivialerweise. Wir untersuchen dafür die jeweils systematisch kleinsten eines Abschnitts — sind diese noch nichtnegativ, sind es alle.
Im ersten Bereich ist nur die erste Spalte problematisch. Dort haben wir wegen $t \leq i-2$:

$$i-3-(t-1) = i-2-t \geq 0$$

In den weiteren Abschnitten fällt die erste Spalte genau bis zum Wert 0 und startet bei dem nichtnegativen Wert $i-2$ (man beachte an dieser Stelle, dass im Fall $i=2$ diese Unterbereiche nur aus jeweils einer einzigen Zeile bestanden haben) oder bei dem größeren Wert $k+i-2$, sodass hier keine negativen Koeffizienten auftreten können.
Wir haben also mittlerweile eingesehen, dass alle diese Zeilen nichtnegativ ganzzahlige Linearkombinationen des Datensatzes liefern, und dass sie ab s immer um 1 steigen.

Mithin müssen wir nur noch einsehen, dass wir genügend viele Zeilen haben. Dazu zählen wir die Einträge in den einzelnen Bereichen:
Im ersten Bereich haben wir t Zeilen. (Man beachte wieder, dass sich das im Falle $t=0$ mit dem Nichtvorhandensein dieses Bereichs deckt). Der zweite Bereich zählt von 0 auf $k+i-2$, das sind $k+i-1$ Zeilen. Von den Teilbereichen des 3. Bereichs zählt jeder (1. Spalte) von $i-2$ auf 0 herunter, hat also $i-1$ Zeilen; in der letzten Spalte wird von 1 auf k hochgezählt, es gibt also k solcher Teilbereiche. Rechnen wir das zusammen erhalten wir

$$t+k+i-1+k(i-1) = ik+t+i-1$$

Zeilen, und wegen $i \geq 2$ sind das mehr als die notwendigen $ik+t$ Zeilen.
Somit haben wir tatsächlich eingesehen, dass ab s mindestens n Zahlen und damit alle weiteren Zahlen nichtnegativ ganzzahlig aus dem Datensatz linear kombinierbar sind.

Wie gehabt gehen wir nun den zweiten Schritt an, nämlich zu zeigen, dass $s-1$ nicht nichtnegativ ganzzahlig aus dem gegebenen Datensatz linear kombiniert werden kann. Auf jeden Fall gilt

$$s-1 = ik^2 + (i(i-2)+t)k + (i-3)t - 1$$

Wir versuchen es zunächst mit $k+i-4$ oder weniger Summanden. Dann ist die Summe σ, die wir erzielen, sicher kleiner als die Anzahl mal den größten Summanden, also

$$\sigma \leq (k+i-4)(ik+t+i) = ik^2+tk+ik+i^2k+it+i^2-4ik-4t-4i = ik^2+(i^2-3i+t)k+i^2+(i-4)t-4i$$

Unser Argument sollte nun sein, dass das eine zu kleine Summe ergibt, d.h. es müsste gelten:

$$ik^2 + (i^2-3i+t)k + i^2 + (i-4)t - 4i < ik^2 + (i(i-2)+t)k + (i-3)t - 1$$

Dies können wir deutlich vereinfachen:

$$-ik + i^2 - t - 4i < -1 \iff i(i-k+4) < t-1$$

Wegen $i > t-1$ ist das sicher erfüllt, wenn nur $i-k+4$ negativ ist, also wenn $i-k+4 < 0 \iff i-4 < k \iff k > i-3$ ist.
Für genügend großes k ist es also nicht möglich, $s-1$ mit $k+i-4$ Summanden nichtnegativ ganzzahlig aus dem Datensatz linear zu kombinieren.

Wir versuchen es nun mit $k+i-2$ (oder mehr) Summanden. Dann ist das Resultat σ größer oder gleich diese Anzahl multipliziert mit dem kleinsten Summanden, also

$$\sigma \geq (k+i-2)\cdot(ik+t) = ik^2 + i^2k - 2ik + kt + it - 2t = ik^2 + (i(i-2)+t)k + (i-2)t$$

Und damit ist σ (auch für $t=0$) echt größer als $s-1$. (Hier gibt es keine Einschränkungen bezüglich der Größe von k). Folglich ist es nicht möglich, $s-1$ mit $k+i-2$ Summanden aus dem gegebenen Datensatz nichtnegativ ganzzahlig linear zu kombinieren.

Wenn $s-1$ also überhaupt aus dem Datensatz nichtnegativ ganzzahlig linear kombinierbar sein sollte, so kann das nur mit genau $k+i-3$ Summanden geschehen. Wir setzen die projektierte Linearkombination deshalb folgendermaßen an:

$$s-1 = a(ik+t) + b(ik+t+1) + (k+i-3-a-b)(ik+t+i)$$

Der dritte Koeffizient erklärt sich dadurch, dass die drei Koeffizienten in der Summe ja $k+i-3$ ergeben müssen. Ferner müssen wir im Auge behalten, dass a, b und $k+i-3-a-b$ nichtnegativ ausfallen müssen.
Zunächst formen wir um:

$$= aik + at + bik + bt + b + ik^2 + kt + ki + i^2k + it + i^2 - 3ik - 3t - 3i - aik - at - ai - bik - bt - bi$$

$$= ik^2 + kti^2k + it + i^2 - 2ik - 3t - 3i - ai - b(i-1)$$

Also müsste gelten:

$$ik^2 + (i(i-2)+t)k + (i-3)t - 1 = ik^2 + kt + i^2k + it + i^2 - 2ik - 3t - 3i - ai - b(i-1)$$

Auch das lässt sich wesentlich vereinfachen:

$$-1 = i^2 - 3i - ai - b(i-1) \iff ai + b(i-1) = i^2 - 3i + 1$$

Die letzte Gleichung fragt nun offensichtlich nach der nichtnegativ ganzzahligen Linearkombinierbarkeit von i^2-3i+1 aus i und $i-1$. Nach dem Abschnitt über zweielementige Datensätze ist der Schwellenwert für den Datensatz $\{i-1,\ i\}$ genau $(i-2)(i-1) = i^2-3i+2$. Der fragliche Wert ist dann genau der Schwellenwert minus 1, also auf keinen Fall nichtnegativ ganzzahlig linear kombinierbar.
Somit hat auch dieser Ansatz zu einem Widerspruch geführt, und wir haben eingesehen, dass $s-1$ auf keine Weise aus dem gegebenen Datensatz nichtnegativ ganzzahlig linear kombiniert werden kann.
Somit ist s endgültig als Schwellenwert etabliert und uns bleibt nur noch der zweite Fall:

(ii) Sei also nun $t = i - 1$ und wir können auf die Variable t deshalb in diesem Teil verzichten, unser Datensatz lautet also: $\{n + i - 1,\ n + i,\ n + 2i - 1\}$. Und der Schwellenwert s, den wir zu beweisen haben, lautet

$$s = ik^2 + (i(i-2) + i - 1)k + (i-1)(i-2)$$

Es ist also, salopp gesagt — s als Polynom im k aufgefasst — nur das Absolutglied, das aus der Reihe tanzt, die Koeffizienten vor k^2 und k setzen die für die anderen Restklassen gefundene Regelmäßigkeit fort.

Wir zeigen zuerst wieder, dass s aus dem Datensatz nichtnegativ ganzzahlig linear kombinierbar ist, und mit s mindestens $ik+i-1$ aufeinander folgende Werte. Die Liste, die wir dazu anführen, verzichtet auf den prologhaften 1. Bereich und startet gleich mit dem zweiten:

$ik + i - 1$	$ik + i$	$ik + 2i - 1$
$k + i - 2$	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$k + i - 2$	0
$i - 2$	$k - 1$	1
$i - 3$	k	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$k + i - 3$	1
$i - 2$	$k - 2$	2
$i - 3$	$k - 1$	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$k + i - 4$	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$i - 2$	0	k
$i - 3$	1	k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$i - 2$	k

Dass die Liste mit dem Ergebnis s startet, ergibt sich aus

$$(k+i-2)(ik+i-1) = k(ik+i-1) + (i-2)ik + (i-2)(i-1) = ik^2 + (i(i-2)+i-1)k + (i-2)(i-1)$$

Dass sich das Ergebnis pro Zeile um 1 vergrößert, haben wir unter (i) schon bewiesen, ebenso wie dass die hier aufgeführten Werte allesamt nichtnegativ sind.

Somit brauchen wir nur noch die Zeilen zu zählen. Der erste Abschnitt enthält $k + i - 1$ davon, jeder weitere Teilabschnitt, von denen es k gibt, enthält $i - 1$ Zeilen, somit haben wir insgesamt $k + i - 1 + k(i-1) = ik + i - 1$ Zeilen, also exakt genügend viele.

Damit haben wir etabliert, dass ab s alle Werte aus dem Datensatz nichtnegativ ganzzahlig linear kombiniert werden können.

Wir müssen nun also noch zeigen, dass

$$s - 1 = ik^2 + (i(i-2) + i - 1)k + (i-1)(i-2) - 1$$

nicht aus dem Datensatz nichtnegativ ganzzahlig linear kombiniert werden kann und wir gehen dazu wie gehabt vor.

Wir versuchen zuerst $s-1$ mit $k+i-4$ (oder weniger) Summanden darzustellen. Für das so entstehende Resultat σ gilt dann

$$\sigma \leq (k+i-4)(ik+2i-1) = ik^2+2ik-k+i^2k+2i^2-i-4ik-8i+4 = ik^2+(i^2-2i-1)k+2i^2-9i+4$$

Wir vermuten, dass diese Zahl kleiner als $s-1$ ist (wenn k genügend groß ist), und das setzen wir nun so an:

$$ik^2+(i^2-2i-1)k+2i^2-9i+4 < s-1 = ik^2+(i^2-i-1)k+i^2-3i+1$$

Wir vereinfachen:

$$-ik+i^2-6i < -3 \iff k-i+6 > \frac{-3}{-i} = \frac{3}{i}$$

Da $\frac{3}{i}$ kleiner als 2 ist, ist die Aussage wahr, wenn nur $k > i-4$, also $k \geq i-3$ ist, und das haben wir ja vorausgesetzt.
Also lässt sich $s-1$ nicht mit $k+i-4$ Summanden erzielen.

Wir versuchen es nun mit $k+i-2$ Summanden. Dann ist das erzielte Ergebnis σ sicher größer oder gleich

$$\sigma \geq (k+i-2)(ik+i-1) = ik^2+ki-k+i^2k+i^2-i-2ik-2i+2 = ik^2+(i^2-i-1)k+i^2-3i+2 = s > s-1$$

So ist $s-1$ also auch nicht zu erzielen.

Bleibt also nur der Versuch, es mit $k+i-3$ Summanden zu versuchen, also

$$s-1 = a(ik+i-1)+b(ik+i)+(k+i-3-a-b)(ik+2i-1)$$

$$= aik+ai-a+bik+bi+ik^2+2ik-k+i^2k+2i^2-i-3ik-6i+3-aik-2ai+a-bik-2bi+b$$

$$= -ai-b(i-1)+ik^2-ik-k+i^2k+2i^2-7i+3 = s-1 = ik^2+(i(i-2)+i-1)k+(i-1)(i-2)-1$$

$$\iff -ai-b(i-1)+i^2-4i+2=0 \iff ai+b(i-1) = i^2-4i+2$$

Wir wissen, dass i^2-3i+1 nicht nichtnegativ ganzzahlig aus i und $i-1$ linear kombinierbar ist. Da $i^2-4i+2+(i-1) = i^2-3i+1$ ergibt, folgt aus der Annahme, i^2-4i+2 wäre nichtnegativ ganzzahlig aus i und $i+1$ linear kombinierbar, dass auch i^2-3i+1 das wäre (man erhöhte den Koeffizienten vor $i-1$ um 1), ein Widerspruch.
Also ist $s-1$ auch mit $k+i-3$ Summanden nicht als Summe aus dem gegebenen Datensatz zu erzielen, folglich ist nun bewiesen, dass $s-1$ aus dem gegebenen Datensatz nicht als nichtnegative ganzzahlige Linearkombination zu erhalten ist und daraus ergibt sich unsere Behauptung, dass s der korrekte Schwellenwert ist. ∎

Korollar:
Sei t der generische Repräsentant von $[n]_i$. Dann gilt

(i) $s = \frac{1}{i}n^2+(i-2-\frac{t}{i})n-t$, falls $0 \leq t \leq i-2$

(ii) $s = \frac{1}{i}n^2+(i-3+\frac{1}{i})n$, falls $t = i-1$

Beweis:
Man nimmt die Beziehung $n = ik+t$, löst sie zu $k = \frac{n-t}{i}$ auf und setzt das in die in Satz 3 bewiesenen k-Formeln ein und vereinfacht die entstehenden Terme, ein Vorgang, den wir hier nicht wiedergeben wollen.

Bemerkung: Wir wollen noch kurz demonstrieren, wie sich die $k \geq i-3$-Bedingung praktisch auswirkt. Wir haben in der folgenden Liste, die die tatsächlichen Schwellenwerte ab $n=2$ erfassen, dadurch markiert, welche Werte kleiner als berechnet ausfallen, indem wir bei diesen Werten jeweils in der letzten Spalte angeben, welchen Wert sie gemäß der Formel einnehmen müssten:

$n =$	2	$s =$	2	(6)
$n =$	3	$s =$	6	(9)
$n =$	4	$s =$	12	
$n =$	5	$s =$	20	
$n =$	6	$s =$	30	
$n =$	7	$s =$	26	
$n =$	8	$s =$	30	(38)
$n =$	9	$s =$	42	
$n =$	10	$s =$	46	
$n =$	11	$s =$	55	
$n =$	12	$s =$	72	
$n =$	13	$s =$	64	
$n =$	14	$s =$	82	
$n =$	15	$s =$	87	
$n =$	16	$s =$	92	
$n =$	17	$s =$	102	
$n =$	18	$s =$	126	
$n =$	19	$s =$	132	
$n =$	20	$s =$	138	
$n =$	21	$s =$	144	
$n =$	22	$s =$	150	
$n =$	23	$s =$	161	
$n =$	24	$s =$	192	
$n =$	25	$s =$	199	
$n =$	26	$s =$	206	
$n =$	27	$s =$	213	
$n =$	28	$s =$	220	
$n =$	29	$s =$	232	
$n =$	30	$s =$	270	
$n =$	31	$s =$	278	
$n =$	32	$s =$	286	
$n =$	33	$s =$	294	
$n =$	34	$s =$	302	
$n =$	35	$s =$	315	
$n =$	36	$s =$	360	
$n =$	37	$s =$	369	
$n =$	38	$s =$	378	
$n =$	39	$s =$	387	
$n =$	40	$s =$	396	

Es ist auffällig, dass ab $k = 2 = i - 4$ keine Kleinheitsunfälle mehr auftreten, vielleicht könnte man die Argumentation beim Beweis dahingehend verfeinern; und dass insgesamt nur drei der Werte falsch sind. Es zeigt sich in praxe häufiger, dass Formeln auch außerhalb des Bereiches, in dem sie sich mit den verwendeten Methoden beweisen lassen, korrekt sind. Zumindest aber ist damit die tatsächliche Existenz von Kleinheitsunfällen belegt.

2.2.2 Der Datensatz $\{n,\ n+1,\ n+i\}$; Anzahl der Linearkombinationen

Wir beginnen sofort mit dem

Satz 4:

Es sei x eine natürliche Zahl. Dann gibt es genau

$$A_{1,i}(x) = \sum_{j=\left[\frac{x+n+i-1}{n+i}\right]}^{\left[\frac{x}{n}\right]} \left(\left[\frac{j(n+i) - x - i\left([j(n+i)-x]_{i-1}\right)^*}{i(i-1)} + 1 \right] - max(0, \left[\frac{(n+1)j - x}{i-1}\right]) \right)$$

Möglichkeiten, x aus dem Datensatz linear zu kombinieren.
Falls die Summe nicht existiert, weil die untere Grenze größer als die obere ist, ist die Anzahl als 0 zu verstehen.

Beweis:

Wir stellen uns vor, wie man x mit dem Datensatz nichtnegativ ganzzahlig linear kombinieren kann. Zuerst überlegen wir uns, wie viele Summanden — wir nennen ihre Zahl j — man mindestens verwenden muss und wie viele man höchstens verwenden kann. Wenn man sich vorstellt, nur den größten Summanden $n+i$ zu verwenden, so muss die Anzahl an Summanden multipliziert mit $n+i$ mindestens x ergeben, es muss also

$$j(n+i) \geq x \iff j \geq \frac{x}{n+i}$$

gelten. Wegen der Möglichkeit der Gleichheit, ist dies wieder äquivalent mit

$$j \geq \left[\frac{x+n+i-1}{n+i}\right]$$

Andererseits darf j multipliziert mit dem kleinsten Summanden x nicht übersteigen, es muss also gelten

$$j \cdot n \leq x \iff j \leq \frac{x}{n} \iff j \leq \left[\frac{x}{n}\right]$$

da j ja ganzzahlig ist.
Folglich rangiert j von $\left[\frac{x+n+i-1}{n+i}\right] \ldots \left[\frac{x}{n}\right]$.

Fixieren wir nun einen Wert von j und untersuchen die Möglichkeiten. Dazu setzen wir an:

$$an + b(n+1) + (j-a-b)(n+i) = x$$

Wir vereinfachen:

$$an + bn + b + jn + ji - an - ai - bn - bi = x \iff jn + ji - ai - b(i-1) = x$$

$$\iff ai + b(i-1) = j(n+i) - x$$

Dabei muss gelten, dass alle Koeffizienten ganzzahlig und nichtnegativ sind, das heißt $a \geq 0$ und $b \geq 0$ und $(j-a-b) \geq 0 \iff a+b \leq j$, die letzte Bedingung wird zu beachten sein, denn aus

$$ai + b(i-1) = j(n+i) - x \quad \text{und} \quad a+b \leq j \iff a(i-1) + b(i-1) \leq j(i-1)$$

folgt

$$a \geq j(n+1) - x$$

Für das Weitere ist es wichtig festzuhalten, dass a und $j(n+i) - x$ die gleiche Restklasse modulo $i-1$ haben, denn

$$[ai + b(i-1)]_{i-1} = [a]_{i-1} = [j(n+i) - x]_{i-1} = [j(n+1) - x]_{n-1}$$

Wie viele Möglichkeiten, die Gleichung $ai + b(i-1) = j(n+i) - x$ nichtnegativ ganzzahlig zu lösen, gibt es? Nach Satz 2 gibt es dafür genau — wir müssen n durch $i-1$ und m durch i ersetzen —

$$\left[\frac{j(n+i) - x - i\left([j(n+i)-x]_{i-1} \cdot [i]_{i-1}^{-1}\right)^*}{i(i-1)} + 1 \right]$$

Möglichkeiten, wobei wir wegen $[i]_{i-1} = [1]_{i-1}$ etwas vereinfachen können zu:

$$\left[\frac{j(n+i) - x - i\left([j(n+i) - x]_{i-1}\right)^*}{i(i-1)} + 1\right]$$

Allerdings haben wir die Bedingung $a \geq j(n+1) - x$ noch nicht eingerechnet. Häufig wird diese Bedingung leer sein, weil $j(n+1) - x$ negativ oder 0 ist. Falls das nicht der Fall ist, werden Werte von a ausgeschlossen. Die Frage ist, wie viele? Die Antwort auf diese Frage lautet: Alle, die kleiner als $j(n+1) - x$ sind. Und natürlich können nur Werte ausgeschlossen werden, die von ihrer $i-1$-Restklasse überhaupt für a-Werte in Frage kommen. Da der gerade noch erlaubte a-Grenzwert stets zu diesen erlaubten a-Werten gehört — wir haben ja oben gesehen, dass a, $j(n+i) - x$ und $j(n+1) - x$ stets dieselbe Restklasse modulo $i-1$ darstellen —, sind das genau $\left[\frac{(j(n+1)-x}{i-1}\right]$ viele. (Man beachte, dass wegen des engen Bereichs, in dem sich j bewegen muss, diese Zahl nicht größer als die Zahl sein kann, von der sie subtrahiert wird). Und damit haben wir die oben angegebene Formel hergeleitet. ∎

2.3 Der Datensatz $\{n,\ n+i-1,\ n+i\}$

Auch bei diesem Datensatz gibt es zwei Daten, die sich nur um 1 unterscheiden, allerdings sind es hier nicht die kleineren, sondern die beiden größeren Werte. Es ist dabei durchaus zu erwarten, dass die Methoden des letzten Abschnitts auch hier anwendbar sind, und genau so ist es auch, es stellt sich sogar heraus, dass die Ergebnisse ein wenig 'glatter' sind als im vorigen Abschnitt.

2.3.1 Der Schwellenwert für den Datensatz $\{n,\ n+i-1,\ n+i\}$

Beginnen wir also sofort mit dem

Satz 5:

Es sei $[n]_i = [t]_i$ und t sei der generische Repräsentant. Wir schreiben dann $n = ki + t$ und der zugehörige Schwellenwert beträgt

$$s = ik^2 + (i(i-2) + t)k + (i-1+t)(i-2)$$

Beweis:

Wir zeigen zunächst, dass ab s mindestens n Werte als nichtnegative ganzzahlige Linearkombination des

Datensatzes darstellbar sind. Dazu dient die folgende Liste:

$ik+t$	$ik+t+i-1$	$ik+t+i$
k	$i-2$	0
k	$i-3$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	0	$i-2$
$k-1$	$i-1$	0
$k-1$	$i-2$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k-1$	0	$i-1$
$k-2$	$i-1$	1
$k-2$	$i-2$	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k-2$	0	i
	$\vdots$	
0	$i-1$	$k-1$
0	$i-2$	k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	$k+i-2$

Zählen wir zunächst, wie viele Zeilen die Liste hat. Der erste Abschnitt hat deren $i-1$, jeder weitere Abschnitt hat i, und es gibt k weitere solche Abschnitte, sodass sich insgesamt $ik+i-1$ Zeilen ergeben, und das sind immer mindestens $ik+t$ Zeilen.
Nun rechnen wir noch rasch nach, dass das erste Element der Liste tatsächlich den Schwellenwert ergibt:

$$\begin{aligned} k(ik+t)+(i-2)(ik+t+i-1) &= ik^2+kt+i^2k+it+i^2-i-2ik-2t-2i+2 \\ &= ik^2+(i(i-2)+t)k+(i-1+t)(i-2) \end{aligned}$$

Dann müssen wir sicherstellen, dass sich das Resultat jeweils um 1 erhöht. Das ist innerhalb der einzelnen Blöcke trivial, da dort einfach ein Summand durch einen um 1 größeren Summanden ersetzt wird. Beim Übergang vom ersten (kleineren) Block zum zweiten wird ein $ik+t$- durch einen $ik+t+i-1$-Summanden ersetzt, das Ergebnis wird also gegenüber dem ersten Summanden des ersten Blocks um $i-1$ größer, der letzte Summand des ersten Blocks war um $i-2$ größer als der erste (weil es $i-1$ Zeilen sind), und Analoges gilt für den Übergang vom ersten Eintrag jedes weiteren Blockes zum ersten Eintrag des darauf folgenden Blockes, nur dass hier ein $ik-t$- durch einen $ik+t+i$-Summanden ersetzt wird, und da jeder solche Block i Zeilen hat, stimmt die Aussage.

Nun zeigen wir in bewährter Manier, dass $s-1$ nicht als nichtnegative ganzzahlige Linearkombination aus dem Datensatz darstellbar ist; dabei unterscheiden wir wieder nach der Anzahl der verwendeten Summanden.
Wenn wir $k+i-3$ oder weniger Summanden verwenden, erhalten wir höchstens

$$\begin{aligned} \sigma &= (k+i-3)(ik+t+i) = ik^2+tk+ik+i^2k+it+i^2-3ik-3t-3i \\ &= ik^2+(i(i-2)+t)k+i^2-3i+it-3t = ik^2+(i(i-2)+t)k+(i+t)(i-3) \\ &< ik^2+(i(i-2)+t)k+(i-1+t)(i-2)-1 = s-1 \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Differenz des zweiten Terms minus den ersten $t+1$ beträgt, und dieser Ausdruck ist stets positiv.
Wenn wir $k+i-1$ oder mehr Summanden verwenden, so erhalten wir mindestens

$$\sigma = (k+i-1)(ik+t) = ik^2+kt+i^2k+it-ik-t = ik^2+(i(i-1)+t)k+(i-1)t$$

Wir subtrahieren davon $s-1$ und erhalten

$$ik^2+(i(i-1)+t)k+(i-1)t-(ik^2+(i(i-2)+t)k+(i-1+t)(i-2)-1)$$

$$=ik+it-t-i^2+2i+i-2-it+2t+1=ik+t-i^2+3i-1$$

und fragen uns, ob diese Differenz positiv ist:

$$ik+t-i^2+3i-1>0 \iff ik-i^2+3i>1-t \iff k-i+3>\frac{1-t}{i}$$

Das ist sicher der Fall, wenn $k-i+3\geq 1$, also wenn $k\geq i-2$ ist. (Ansonsten drohen wie gehabt Kleinheitsunfälle).
Zuletzt versuchen wir es mit genau $k+i-2$ Summanden:

$$\sigma=(k+i-2-a-b)(ik+t)(ik+t)+a(ik+t+i-1)+b(ik+t+i)$$

$$=ik^2+kt+i^2k+it-2ik-2t-aik-at-bik-bt+aik+at+a(i-1)+bik+bt+bi$$

$$=ik^2+kt+i^2k+it-2ik-2t+a(i-1)+bi=ik^2+(i(i-2)+t)k+t(i-2)+a(i-1)+bi$$

Dies setzen wir nun gleich $s-1$:

$$ik^2+(i(i-2)+t)k+t(i-2)+a(i-1)+bi=ik^2+(i(i-2)+t)k+(i-1+t)(i-2)-1$$

$$a(i-1)+bi=(i-1+t)(i-2)-1-t(i-2)=(i-1)(i-2)-1$$

Das liegt genau um 1 unter dem Schwellenwert für $\{i-1,\ i\}$, ist also so nicht nichtnegativ ganzzahlig lösbar.

Damit ist alles gezeigt. $\blacksquare$

Bemerkung:
Die relativ starke Bedingung $k\geq i-2$ wird so von der Praxis nicht reflektiert und ist in diesem Ausmaß wohl eher dem gewählten Beweis geschuldet.

2.3.2 Die Anzahl der Möglichkeiten für den Datensatz $\{n,\ n+i-1,\ n+i\}$

Auch hier haben wir keinen Anlass, unser Vorgehen wesentlich zu ändern und formulieren deshalb unverzüglich den

Satz 6:
Sei x eine natürliche Zahl. Dann gibt es genau

$$\sum_{j=\left[\frac{x+n+i-1}{n+i}\right]}^{\left[\frac{x}{n}\right]}\left[\frac{x-jn-i([x-jn]_{i-1})^*}{i(i-1)}+1\right]-max(0,\left[\frac{x-(n+i-1)j}{i-1}\right])$$

wobei die Summe als 0 zu verstehen ist, wenn die obere Grenze der Summe kleiner als die untere ist.

Beweis:
Wir betrachten j wieder als die Anzahl der Summanden, die die Summe x ergeben sollen. Dann muss gelten:

$$x=(j-a-b)n+a(n+i-1)+b(n+i)=jn-an-bn+an+a(i-1)+bn+bi=jn+(i-1)a+ib$$

$$\iff a(i-1)+bi=x-jn$$

Das ist genau die Frage, wie viele Möglichkeiten es gibt, $x-jn$ aus dem Datensatz $i-1,\ i$ nichtnegativ ganzzahlig linear zu kombinieren, nach Satz 2 sind das genau

$$\left\lfloor \frac{x-jn-i\left([x-jn]_{i-1}\cdot[i]_{i-1}^{-1}\right)^*}{i(i-1)}+1\right\rfloor$$

Möglichkeiten, wobei sich der Term vereinfachen lässt: Wegen $[i]_{i-1}^{-1}=[1]_{i-1}^{-1}=[1]_{i-1}$ ergibt sich

$$\left\lfloor \frac{x-jn-i\cdot([x-jn]_{i-1})^*}{i(i-1)}+1\right\rfloor$$

Wir haben aber dabei nur darauf geachtet, dass a und b nichtnegativ sind, damit auch $j-a-b$ das ist, muss $a+b\leq j$ gelten, und damit $b\geq x-(n+i-1)j$. (Man beachte an dieser Stelle, dass es nichts ausmacht, wenn wir die prinzipielle Anzahl der Möglichkeiten nach der Variablen a zählen (das tut nämlich der entsprechende Beweis von Satz 2), die der 'verbotenen' aber nach der Variablen b, weil diese in der Beziehung $a(i-1)+bi=x-jn$ sich in einer Bijektion befinden). Da b modulo $i-1$ eindeutig festliegt (siehe den Beweis von Satz 2), sind genau $\left\lceil\frac{x-(n+i-1)j}{i-1}\right\rceil$ Werte für b auszuschließen, bzw. keine, wenn der Ausdruck negativ sein sollte.
Damit ergibt sich unsere obige Formel.
Und selbstverständlich bedeutet die Tatsache, dass die Bedingung für die Zahl j unerfüllbar ist, indem die obere Grenze kleiner als die untere ist, dass es keine Möglichkeiten gibt. ∎

2.4 Der Datensatz $n,\ n+2,\ n+i$ mit ungeradem i

2.4.1 Der Schwellenwert zum Datensatz $n,\ n+2,\ n+i$

Dies ist der logisch nächste Schritt nach den oben betrachteten Datensätzen, aber er wird sich als wesentlich sperriger erweisen, was man bereits der Ergebnisformulierung von Satz 7 ansehen kann, die weitaus größeren Probleme, wenngleich sie hauptsächlich technischer Natur, sowohl schreibtechnischer als auch rechentechnischer, sind. Wir formulieren daher gleich

Satz 7:
Es sei i eine ungerade natürliche Zahl größergleich 5. Dann beträgt der Schwellenwert für den Datensatz $\{n,\ n+2,\ n+i\}=\{ik+t,\ ik+t+2,\ ik+t+i\}$ wobei $k\geq i-3$ sein muss und t der generische Repräsentant von $[n]_i$ ist:

(i) Für t gerade: $s=ik^2+(i(i-2)+t)k+t(i-3)+i-1$

(ii) Für t ungerade und $t\leq i-6$: $s=ik^2+(i(i-3)+t)k+t(i-4)-1$

(iii) Für $t=i-4$: $s=ik^2+(i^2-2i-4)k+i^2-6i+11$

(iv) Für $t=i-2$: $s=ik^2+(i^2-i-2)k+i^2-3i+3$

Bemerkung:
Man beachte, dass der Fall (ii) für $i=5$ leer ist, da es kein entsprechendes nichtnegatives t gibt.

Beweis: (i) Dies ist der relativ einfachste Fall.
Sei also der Datensatz $ik+t,\ ik+t+2,\ ik+t+i$ mit geradem t gegeben, wir müssen zeigen, dass $s=ik^2+(i(i-3)+t)k+t(i-4)+i-1$ ist. Um einzusehen, dass ab diesem Wert mindestens $ik+t$ Zahlen aus dem Datensatz nichtnegativ ganzzahlig linear kombinierbar sind, formulieren wir wieder eine Liste wie folgt (man beachte, dass diese für kleine i weniger Zeilen hat, als wir aufschreiben, um

ihr inneres Prinzip deutlich zu machen):

$ik+t$	$ik+t+2$	$ik+t+i$
$k+\frac{i+t-3}{2}$	$\frac{i-1-t}{2}$	0
$i-4$	0	$k+1$
$k+\frac{i+t-5}{2}$	$\frac{i+1-t}{2}$	0
$i-5$	1	$k+1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k+\frac{i-1}{2}$	$\frac{i-3}{2}$	0
$i-4-\frac{t-2}{2}$	$\frac{t-2}{2}$	$k+1$
$k+\frac{i-3}{2}$	$\frac{i-1}{2}$	0
$k+i-3$	0	1
$k+\frac{i-5}{2}$	$\frac{i+1}{2}$	0
$k+i-4$	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k-1$	$i-1$	0
$k+\frac{i-5}{2}$	$\frac{i-1}{2}$	1
$k+i-4$	0	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k-2$	$i-1$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{i-1}{2}$	$\frac{i-1}{2}$	$k-1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$i-1$	$k-1$

Wir müssen nun zunächst zeigen, dass die Liste mit der richtigen Zahl, nämlich s beginnt, dann dass die Summe pro Zeile tatsächlich um 1 ansteigt und schließlich, dass die Liste (mindestens) $ik+t$ Zeilen hat. Beim ersten Schritt müssen wir der Tatsache Rechnung tragen, dass der erste Abschnitt für $t=0$ gar nicht existiert, dann muss der erste Eintrag des zweiten Abschnitts den Wert s ergeben.
Beginnen wir mit der ersten Zeile des ersten Abschnitts:

$$\sigma = (k+\frac{i+t-3}{2})(ik+t)+\frac{i-1-t}{2}(ik+t+2)$$

$$= ik^2+tk+\frac{1}{2}i^2k+\frac{1}{2}it+\frac{1}{2}itk+\frac{1}{2}t^2-\frac{3}{2}ik-\frac{3}{2}t+\frac{1}{2}i^2k+\frac{1}{2}it+i-\frac{1}{2}ik-\frac{1}{2}t-1-\frac{1}{2}itk-\frac{1}{2}t^2-t$$

$$= ik^2+tk+i^2k+it-2ik-3t+i-1 = ik^2+(i(i-2)+t)k+t(i-3)+i-1 = 2$$

Nun betrachten wir die zweite Zeile:

$$\sigma = (i-4)(ik+t)+(k+1)(ik+t+i) = i^2k+it-4ik-4t+ik^2+kt+ki+ik+t+i$$

$$= i^2k+it-2ik-3t+ik^2+i = ik^2+(i(i-2)+t)k+t(i-3)+i = s+1$$

Für den Rest des ersten Abschnitts ersetzen wir alle zwei Zeilen einen $ik+t$- durch einen $ik+t+2$-Summanden, erhöhen also die Summe pro solchen Schritt um 2, deshalb setzt sich der +1-Anstieg im ganzen ersten Abschnitt fort.
Da sich der erste Eintrag der zweiten und der erste Eintrag der letzten Zeile um $\frac{t-2}{2}=\frac{t}{2}-1$ unterscheiden, gibt es $\frac{t}{2}-1+1=\frac{t}{2}$ Zeilenpaare, also t Zeilen (und im Fall $t=0$ eben keine).
Untersuchen wir nun die erste Zeile des zweiten Abschnitts.

$$\sigma = (k+\frac{i-3}{2})(ik+t)+\frac{i-1}{2}(ik+t+2)$$

$$= ik^2 + tk + \frac{1}{2}i^2k + \frac{1}{2}it - \frac{3}{2}ik - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}i^2k + \frac{1}{2}it + i - \frac{1}{2}ik - \frac{1}{2}t - 1$$

$$= ik^2 + tk + i^2k + it - 2ik - 2t + i - 1 = ik^2 + (i(i-2+t)k + t(i-3) + t + i - 1 = s + t$$

Damit schließt sich die erste Zeile des zweiten Abschnitts mit $+1$ an die letzte des ersten Abschnitts an (diese muss ja $s+t-1$ betragen, weil es t Zeilen sind), falls es diesen gibt; wenn es ihn nicht gibt, ist $t = 0$, also liefert die erste Zeile des zweiten Abschnitts genau s, was wir noch zu belegen hatten. Die zweite Zeile des zweiten Abschnitts liefert

$$\sigma = (k+i-3)(ik+t) + ik + t + i = ik^2 + tk + i^2k + it - 3ik - 3t + ik + t + i$$

$$= ik^2 + (i(i-2)+t)k + t + i = s + t + 1$$

Den Rest des zweiten Abschnitts regiert wieder die Ersetzung eines $ik+t$- durch einen $ik+t+2$-Summanden, sodass der $+1$-Anstieg im ganzen zweiten Abschnitt gilt. Und wegen $k + \frac{i-3}{2} - (k-1) = \frac{i-1}{2}$ gibt es in der zweiten Zeile $\frac{i+1}{2}$ Zeilen mit einem 0-Eintrag in der letzten Spalte und $\frac{i-1}{2}$ Zeilen mit einen 1-Eintrag in der letzten Spalte, also insgesamt i Zeilen.
Der dritte Abschnitt unterscheidet sich nun vom zweiten Abschnitt durch die Ersetzung eines $ik+t$-Summanden durch einen $ik+t+i$-Summanden, zu σ kommen also im Unterschied zum vorigen Abschnitt jeweils i dazu, was nach sich zieht, dass der $+1$-Anstieg sich wie gewünscht fortsetzt; und Gleiches gilt für alle folgenden Abschnitte.
Nun wissen wir, dass die Zeilen jeweils in der Summe 1 mehr ergeben als die Vorgängerzeilen. Wir müssen lediglich noch sehen, ob es genug Zeilen sind. Der erste Abschnitt hat t Zeilen, alle weiteren haben per Konstruktion i Zeilen, und der erste Eintrag der Abschlusszeile geht von $k-1$ bis 0, es gibt also k Abschnitte mit i Zeilen. Insgesamt umfasst unsere Liste also genau $ik+t$ Zeilen, wie benötigt.

Nun werden wir zeigen, dass $s-1$ nicht nichtnegativ ganzzahlig aus dem Datensatz linear kombinierbar ist. Die Summandenanzahl, die in der obigen Liste vorkommen, sind $k+i-3$ und $k+i-2$, die wir deshalb getrennt betrachten.
Nehmen wir also zunächst an, wir hätten nur $k+i-4$ (oder weniger) Summanden. Dann gilt für die entstehende Summe σ:

$$\sigma \le (k+i-4)(ik+t+i) = ik^2 + tk + ik + i^2k + it + i^2 - 4ik - 4t - 4i$$

$$= ik^2 + (i(i-3)+t)k + t(i-4) + i^2 - 4i = s - ik - t + i^2 - 5i + 1$$

Wir behaupten, dass dies kleiner als s ist. Dazu muss $-ik - t + i^2 - 5i + 1 < 0$ sein, das bedeutet

$$-ik + i^2 - 5i < t - 1 \iff k - i + 5 > \frac{t-1}{-i}$$

Für $k > i - 4$ ist dies tatsächlich der Fall, weil $\frac{t-1}{-i} < 1$ ist.
Somit kann s nicht mit nur $k+i-4$ oder weniger Summanden erreicht werden.

Verwendet man $k+i-1$ (oder mehr) Summanden, dann gilt für die Summe σ:

$$\sigma \ge (k+i-1)(ik+t) = ik^2 + tk + i^2k + it - ik - t = ik^2 + (i(i-1)+t)k + t(i-1)$$

$$= s + ik + 2t - i + 2 > s$$

wenn nur $k > 1$, was wegen $i \ge 5$ und $k \ge i-3$ sicher der Fall ist.

Falls man $i+k-2$ Summanden verwendet, betrachten wir zunächst den Fall, dass mindestens einmal der 'große' Summand $ik+t+i$ verwendet wird. Dann gilt:

$$\sigma \ge (i+k-3)(ik+t) + ik + t + i = ik^2 + it + ik^2 + kt - 3ik - 3t + ik + t + i$$

$$= ik^2 + (i(i-2)+t)k + t(i-3) + t + i > s - 1 = ik^2 + (i(i-2)+t)k + t(i-3) + i - 2$$

Also können nur die beiden 'kleinen' Summanden verwendet werden. Wir setzen deshalb an:

$$\sigma = a(ik+t) + (k+i-2-a)(ik+t+2)$$

und rechnen mit $a = k+i-2$ selbst. Dann erhalten wir

$$\sigma = (k+i-2)(ik+t) = ik^2 + tk + i^2k + it - 2ik - 2t = ik^2 + (i(i-2)+t)k + t(i-2)$$

Das unterscheidet sich von $s-1$ um $i-2+t$, also um eine ungerade Zahl. Ersetzen von $k+t$- durch $k+t+2$-Summanden kann aber die Parität des Ergebnisses nicht verändern, folglich kann man nie $s-1$ als Resultat erhalten.

Wir versuchen zuletzt noch $i+k-3$ Summanden und setzen wie gewohnt an:

$$\sigma = a(ik+t) + b(ik+t+2) + (k+i-3-a-b)(ik+t+i)$$

$$= aik + at + bik + bt + 2b + ik^2 + tk + ik + i^2k + it + i^2 - 3ik - 3t - 3i - aik - at - ai - bik - bt - bi$$
$$= ik^2 + tk - 2ik + i^2k + t(i-3) + i^2 - 3i - ai - b(i-2)$$

Nun setzen wir diesen Wert mit $s-1$ gleich:

$$ik^2 + tk - 2ik + i^2k + t(i-3) + i^2 - 3i - ai - b(i-2) = ik^2 + (i(i-2)+t)k + t(i-3) + i - 2$$

$$\iff i^2 - 4i + 2 = ai + b(i-2)$$

Der Schwellenwert für den Datensatz $i,\ i-2$ beträgt nach Satz 1 $(i-1)(i-3) = i^3 - 4i + 3$. Die linke Seite in der obigen Gleichung ist genau 1 weniger als der Schwellenwert, kann also nicht nichtnegativ ganzzahlig aus i und $i-2$ linear kombiniert werden.

Damit haben wir endgültig gesehen, dass $s-1$ nicht aus unserem Datensatz nichtnegativ ganzzahlig linear kombiniert werden kann. Also ist s tatsächlich der Schwellenwert.

(ii) Sei also nun t ungerade (und als generischer Repräsentant nichtnegativ) und $t \leq i-6$. Dann haben wir zu zeigen, dass $s = ik^2 + (i(i-3)+t)k + t(i-4) - 1$ ist.
Wir beginnen wieder mit der Liste:

$ik+t$	$ik+t+2$	$ik+t+i$
$\frac{i-5}{2}$	$\frac{i-1}{2}$	$k-1$
$i-4$	0	k
$\frac{i-7}{2}$	$\frac{i+1}{2}$	$k-1$
$i-5$	1	k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{i-4-t}{2}$	$\frac{i+t-2}{2}$	$k-1$
$i-4-\frac{t-1}{2}$	$\frac{t-1}{2}$	k
$k+i-3$	0	0
$i-\frac{t+9}{2}$	$\frac{t+1}{2}$	k
$k+i-4$	1	0
$i-\frac{t+11}{2}$	$\frac{t+3}{2}$	k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{i-t-6}{2}$	$\frac{i+t-2}{2}$	k

Fortsetzung:

$ik+t$	$ik+t+2$	$ik+t+i$
$k+\frac{i-5}{2}$	$\frac{i-1}{2}$	0
$k+i-4$	0	1
$k+\frac{i-7}{2}$	$\frac{i+1}{2}$	0
$k+i-5$	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k-2$	$i-1$	0
$k+\frac{i-7}{2}$	$\frac{i-1}{2}$	1
$k+i-5$	0	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k-3$	$i-1$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\frac{i-1}{2}$	$\frac{i-1}{2}$	$k-2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$i-1$	$k-2$

Es ist wiederum so, dass der erste Abschnitt hier deutlich länger erscheint, als er für kleine i oder t ist, insbesondere für $t=1$ besteht er lediglich aus den ersten beiden Zeilen. Im Gegensatz zu Fall (i) existiert er aber immer, wenn es Fall (ii) überhaupt gibt (also für $i \geq 7$).

Wir rechnen zuerst nach, dass der erste Eintrag der Liste tatsächlich s ergibt:

$$\sigma = \frac{i-5}{2}(ik+t) + \frac{i-1}{2}(ik+t+2) + (k-1)(ik+t+i)$$

$$= \frac{1}{2}i^2k + \frac{1}{2}it - \frac{5}{2}ik - \frac{5}{2}t + \frac{1}{2}i^2k + \frac{1}{2}it + i - \frac{1}{2}ik - \frac{1}{2}t - 1 + ik^2 + tk + ik - ik - t - i$$

$$= i^2k + it - 3ik - 4t - 1 + ik^2 + tk = ik^2 + (i(i-3)+t)k + t(i-4) - 1 = s$$

Die Summe der ja stets existierenden zweiten Zeile beträgt:

$$(i-4)(ik+t) + k(ik+t+i) = i^2k + ti - 4ik - 4t + ik^2 + tk + ki = ik^2 + (i(i-3)+t)k + t(i-4) = s+1$$

Da die zwei voneinander entfernten Zeilen des ersten Abschnitts stets durch die Ersetzung eines $ik+t$-durch einen $ik+t+2$-Summanden auseinander hervorgehen, unterscheiden sich ihre Summen um 2, sodass im gesamten ersten Abschnitt die Summe zeilenweise um je $+1$ größer wird.
Offensichtlich hat der erste Abschnitt $2(\frac{t-1}{2}+1) = t+1$ Zeilen, die Summe des letzten Eintrags lautet also $s+t$.
Wir berechnen nun die Summe der ersten Zeile des zweiten Abschnitts:

$$\sigma = (k+i-3)(ik+t) = ik^2 + tk + i^2k + it - 3ik - 3t = ik^2 + (i(i-3)+t)k + t(i-3) = s+t+1$$

Also passt der Anschluss.
Die zweite Zeile des zweiten Abschnitts ist gegenüber der letzten Zeile des ersten Abschnitts durch eine $ik+t$ durch $ik+t+2$ Ersetzung unterschieden, ihre Summe ist also um 2 größer und damit um 1 größer als die erste Zeile.
Der Rest des zweiten Abschnitts entsteht wiederum zweizeilenweise durch die Ersetzung eines $ik+t$-durch einen $ik+t+2$-Summanden, sodass sich der Anstieg um $+1$ pro Zeile fortsetzt.
Wegen $2 \cdot (\frac{i+t-2}{2} - \frac{t+1}{2} + 1) = i-1$ hat der zweite Abschnitt $i-1$ Zeilen, endet also mit der Summe $s+t+i-1$.
Die erste Zeile des dritten Abschnitts hat als Summe

$$\sigma = (k + \frac{i-5}{2})(ik+t) + \frac{i-1}{2}(ik+t+2)$$

$$= ik^2 + tk + \frac{1}{2}i^2k + \frac{1}{2}it - \frac{5}{2}ik - \frac{5}{2}t + \frac{1}{2}i^2k + \frac{1}{2}it + i - \frac{1}{2}ik - \frac{1}{2}t - 1$$

$$= ik^2 + tk + i^2k + it - 3ik - 3t + i - 1 = ik^2 + (i(i-3)+t)k + t(i-4) + i + t - 1 = s + i + t$$

Das garantiert den Übergang von Abschnitt 2 zu Abschnitt 3.
Die zweite Zeile von Abschnitt 3 ergibt dann:

$$(k+i-4)(ik+t) + ik + i + t = ik^2 + tk + i^2k + it - 4ik - 4t + ik + i + t$$

$$= ik^2 + (i(i-3)+t)k + t(i-4) + t + i = s + t + i + 1$$

sodass auch zwischen den ersten beiden Zeilen von Abschnitt 3 der $+1$-Anstieg gewährt ist. Für den Rest von Abschnitt 3 gilt wieder zweizeilenweise die Ersetzung eines $ik+t$- durch einen $ik+t+2$-Summanden, sodass der Anstieg zweizeilenweise $+2$ beträgt, zeilenweise also durchgängig $+1$.
Wegen $2(i-1-\frac{i-1}{2}+1)-1 = i$ (man beachte, dass es eine Zeile mehr mit letztem Eintrag 0 gibt als mit letztem Eintrag 1, deshalb das -1 am Schluss) besteht Abschnitt 3 aus genau i Zeilen.
Für die folgenden Abschnitte gilt nun jeweils, dass sie aus dem vorigen Abschnitt durch die Ersetzung eines $ik+t$- durch einen $ik+t+i$-Summanden entstehen, sodass der arithmetische Anschluss der Summen jeweils passt und auch der $+1$-Anstieg sich fortsetzt.

Als nächstes bestimmen wir die Gesamtzahl der Zeilen: Die beiden ersten Abschnitte haben zusammen $t+1+i-1 = i+t$ Zeilen, jeder weitere Abschnitt hat per Konstruktion i Zeilen, da der erste Eintrag der jeweils letzten Zeilen von $k-2$ bis 0 rangiert. gibt es $k-1$ solcher Abschnitte. Zusammen ergeben sich $t+i+(k-1)i = ik+t$ Zeilen wie gefordert.

Nun müssen wir abschließend noch zeigen, dass $s-1$ nicht als nichtnegative ganzzahlige Linearkombination aus dem obigen Datensatz darstellbar ist. Wir unterscheiden dabei wieder nach der Anzahl der verwendeten Summanden.
Wenn wir $i+k-3$ oder mehr Summanden verwenden, so zeigt schon die erste Zeile des zweiten Abschnitts unserer Liste, dass dabei die Summe σ sicher größer als $s-1$ wird.
Verwenden wir nur $i+k-5$ oder weniger Summanden, dann ist

$$\sigma \leq (k+i-5)(ik+t+i) = ik^2 + tk + ik + i^2k + it + i^2 - 5ik - 5t - 5i$$

$$= ik^2 + (i(i-4)+t)k + t(i-5) + i^2 - 5i = s - 1 - ik - t + 2 + i^2 - 5i$$

Wir untersuchen, wann $-ik-t+2+i^2-5i$ negativ ist:

$$-ik - t + 2 + i^2 - 5i < 0 \iff -ik + i^2 - 5i < -t + 2 \iff k - i + 5 > \frac{-t+2}{-i}$$

Dies ist wegen $\frac{-t+2}{-i} < 1$ sicher für $k \geq i-4$ der Fall, also erhalten wir für nur $i+k-5$ (oder weniger) Summanden eine zu kleine Summe.
Zuletzt bleibt noch, es mit $k+i-4$ Summanden zu versuchen. Dazu setzen wir an

$$\sigma = a(ik+t) + b(ik+t+2) + (i+k-4-a-b)(ik+t+i)$$

$$= aik + at + bik + bt + 2b + i^2k + it + i^2 + ik^2 + tk + ik - 4ik - 4t - 4i - aik - at - ai - bik - bt - bi$$

$$= -ai - b(i-2) + i^2k + it + i^2 + ik^2 + tk - 3ik - 4t - 4i = -ai - b(i-2) + ik^2 + (i(i-3)+t)k + t(i-4) + i^2 - 4i$$

Verglichen mit $s-1$ ergibt sich

$$ik^2 + (i(i-3)+t)k + t(i-4) - 2 = -ai - b(i-2) + ik^2 + (i(i-3)+t)k + t(i-4) + i^2 - 4i$$

$$\iff ai + b(i-2) = i^2 - 4i + 2$$

Wir haben schon bei (i) eingesehen, dass dies mit ganzzahligem nichtnegativem a und b nicht möglich ist.
Folglich kann $s-1$ aus dem gegebenen Datensatz nicht ganzzahlig nichtnegativ linear kombiniert werden, womit (ii) etabliert ist.

(iii) Wir haben also nun den Datensatz $ik+i-4,\ ik+i-2,\ ik+2i-4$ und den (zu beweisenden) Schwellenwert $s = ik^2 + (i^2-2i-4)k + i^2 - 6i + 11$. Wir beginnen mit unserer Liste und schicken wieder voraus, dass diese, so wie wir sie aus Gründen der Verständlichkeit aufschreiben, i eine gewisse Größe haben muss (unser Vorbild war $i = 13$); für kleine i, besonders für $i = 5$ sind einige der Terme, die wir formulieren, z.B. $\frac{i-7}{2}$ gar nicht nichtnegativ, man kann sich aber leicht bei jeder solchen Überschreitung davon überzeugen, dass entweder die Zeile oder der ganze Abschnitt, worin sie vorkommt, im Falle $i = 5$ gar nicht existiert. Wir werden diese Überlegungen aber nicht einzeln ausführen!

$ik+i-4$	$ik+i-2$	$ik+2i-4$
$k+\frac{i-5}{2}$	$\frac{i-1}{2}$	0
$k+i-4$	0	1
$k+\frac{i-7}{2}$	$\frac{i+1}{2}$	0
$k+i-5$	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$i-3$	0
$k+\frac{i-3}{2}$	$\frac{i-5}{2}$	1
$k-1$	$i-2$	0
$k+\frac{i-5}{2}$	$\frac{i-3}{2}$	1
$k-2$	$i-1$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k-\frac{i-1}{2}$	$i+\frac{i-7}{2}$	0
$k-1$	$i-3$	1
$k+\frac{i-5}{2}$	$\frac{i-5}{2}$	2
$k-2$	$i-2$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k-2$	$i-3$	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$i-2$	$\frac{i-5}{2}$	$k-\frac{i-3}{2}$
$\frac{i-3}{2}$	$i-2$	$k-\frac{i-1}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$i+\frac{i-7}{2}$	$k-\frac{i-1}{2}$
$\frac{i-3}{2}$	$i-3$	$k-\frac{i-3}{2}$
$i-3$	$\frac{i-5}{2}$	$k-\frac{i-5}{2}$
$\frac{i-5}{2}$	$i-2$	$k-\frac{i-3}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$i+\frac{i-9}{2}$	$k-\frac{i-3}{2}$
$\frac{i-3}{2}$	$i-4$	$k-\frac{i-5}{2}$
$i-3$	$\frac{i-7}{2}$	$k-\frac{i-7}{2}$
$\frac{i-5}{2}$	$i-3$	$k-\frac{i-5}{2}$

Fortsetzung:

$ik+i-4$	$ik+i-2$	$ik+2i-4$
$i-4$	$\frac{i-5}{2}$	$k-\frac{i-7}{2}$
$\frac{i-7}{2}$	$i-2$	$k-\frac{i-5}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$i+\frac{i-11}{2}$	$k-\frac{i-5}{2}$
$\frac{i-3}{2}$	$i-5$	$k-\frac{i-7}{2}$
$i-3$	$\frac{i-9}{2}$	$k-\frac{i-9}{2}$
$\frac{i-5}{2}$	$i-4$	$k-\frac{i-7}{2}$
$i-4$	$\frac{i-7}{2}$	$k-\frac{i-9}{2}$
$\frac{i-7}{2}$	$i-3$	$k-\frac{i-7}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$i-3-\frac{i-7}{2}$	$\frac{i-5}{2}$	$k-1$
1	$i-2$	$k-2$
$i-3-\frac{i-5}{2}$	$\frac{i-7}{2}$	$k-1$
0	$i-3$	$k-2$
$i-3-\frac{i-3}{2}$	$\frac{i-9}{2}$	$k-1$
$i-3$	0	k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$i-3-\frac{i-5}{2}$	$\frac{i-5}{2}$	k
0	$i-2$	$k-1$
$\frac{i-3}{2}$	$\frac{i-3}{2}$	k
$k+i-3$	1	0
$\frac{i-5}{2}$	$\frac{i-1}{2}$	k
$k+i-4$	2	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$i-3$	k

Trotz ihrer ausführlichen Ausgestaltung ist diese Liste weniger selbst erklärend als die vorangegangenen und inhaltlich eindeutig die komplizierteste. Wir geben daher eine kurze verbale Erläuterung:
Die Liste hat vier verschiedene Bereiche, die wir jeweils durch waagrechte Doppellinien von den anderen Bereichen abgegrenzt haben. Der erste Bereich besteht nur aus einem kürzeren Abschnitt. Dann kommt der zweite Bereich, der relativ regelmäßig verläuft und in der ersten Spalte jeweils einen $x \to x-1$-Wechsel aufweist. Dieser Bereich hält so lange an, bis der erste Eintrag in der vorletzten Zeile, der mit jedem Abschnitt um 1 geringer wird, den Wert 0 erreicht. Dann beginnt der dritte Abschnitt, der dadurch gekennzeichnet ist, dass, wann immer die Fortsetzung wie im zweiten Bereich negative Einträge in der ersten Spalte erzeugen würde — das tritt mit jedem neuen Abschnitt zwei Zeilen früher auf —, werden Einträge mit einem $ik+2i-4$-Summanden mehr verwendet. Das setzt sich fort bis zum vierten Bereich, der aus nur einem einzigen Abschnitt besteht, bei dem das Auftreten negativer Zahlen in der ersten Spalte nicht mehr auf die gleiche Art vermieden werden kann wie im dritten Bereich, da dann eine negative Zahl in der zweiten Spalte entstünde. Stattdessen erhöht sich die Anzahl der Summanden, die bislang stets $i+k-3$ gewesen ist, auf $i+k-2$.

Wir weisen nun nach, dass diese Liste die gewünschten Eigenschaften hat, zuerst dass die erste Zeile des ersten Abschnitts tatsächlich s liefert:

$$\sigma = (k+\frac{i-5}{2})(ik+i-4) + \frac{i-1}{2}(ik+i-2)$$

$$= ik^2 + ik - 4k + \frac{1}{2}i^k + \frac{1}{2}i^2 - 2i - \frac{5}{2}ik - \frac{5}{2}i + 10 + \frac{1}{2}i^2k + \frac{1}{2}i^2 - i - \frac{1}{2}ik - \frac{1}{2}i + 1$$

$$= ik^2 - 2ik - 4k + i^2k + i^2 - 6i + 11 = 2$$

Eine Bemerkung am Rande: Für $i = 5$ besteht dieser Abschnitt nur aus einer einzigen Zeile. Der Anschluss an den zweiten Abschnitt, den wir gleich angehen werden, behält aber seine Gültigkeit, da für $i = 5$ die erste und die letzte Zeile in unserer Schreibweise identisch sind.
Nun zur zweiten Zeile des ersten Abschnitt (falls sie denn existiert):

$$\sigma = (k + i - 4)(ik + i - 4) + ik + 2i - 4 = ik^2 + ik - 4k + i^2k - 4i - 4ik - 4i + 16 + ik + 2i - 4$$
$$= ik^2 + (i^2 - 2i - 4)k + i^2 - 6i + 12 = s + 1$$

Der Rest des ersten Abschnitts ist zweizeilenweise mit Ersetzungen eines $ik + i - 4$- durch einen $ik + i - 2$-Summanden konstruiert, sodass sich der $+1$-Anstieg fortsetzt.
Wegen $2(k - (k - \frac{i-5}{2})) + 1 = i - 4$ hat er $i - 4$ Zeilen, die letzte Summe lautet also $ik^2 + (i^2 - 2i - 4)k + i^2 - 5i + 6$.

Damit vergleichen wir die erste Zeile des zweiten Abschnitts. Ihre Summe beträgt

$$\sigma = (k + \frac{i-3}{2})(ik + i - 4) + \frac{i-5}{2}(ik + i - 2) + ik + 2i - 4$$
$$= ik^2 + ik - 4k + \frac{1}{2}i^2k + \frac{1}{2}i^2 - 2i - \frac{3}{2}ik - \frac{3}{2}i + 6 + \frac{1}{2}i^2k + \frac{1}{2}i^2 - i - \frac{5}{2}ik - \frac{5}{2}i + 5 - ik + 2i - 4$$
$$= ik^2 - 2ik - 4k + i^2k + i^2 - 5i + 7$$

Dies garantiert den $+1$-Anstieg von Abschnitt 1 zu Abschnitt 2.
Die zweite Zeile des zweiten Abschnitts unterscheidet sich vom letzten Eintrag des ersten Abschnitts durch die Ersetzung eines $ik + i - 4$- durch einen $ik + i - 2$-Summanden, seine Summe ist also um 2 größer und damit um 1 größer als die der ersten Zeile.
Alle weiteren Zeilenpaare entstehen ebenfalls durch eine Ersetzung eines $ik + i - 4$- durch einen $ik + i - 2$-Summanden, also zweizeilenweise durch einen $+2$-Anstieg.
Die restlichen Abschnitte im zweiten Bereich gehen aus dem Abschnitt vor ihnen durch die Ersetzung eines $ik + i - 4$- durch einen $ik + 2i - 4$-Summanden hervor, liefern als Summe also jeweils i mehr als die entsprechenden Zeilen im vorigen Abschnitt. Wegen $2(k + \frac{i-3}{2} - (k - 1)) + 1 = i$ hat der erste Abschnitt im zweiten Bereich i Zeilen und damit jeder weitere auch, folglich setzt sich der konstante $+1$-Anstieg durch sie fort.
Das geht, bis im ersten Abschnitt im dritten Bereich zum ersten Mal — und zwar an vorletzter Stelle — in der ersten Zeile der Eintrag -1 aufträte und die ganze Zeile, in der die -1 aufträte, wird durch die Zeile '$i - 3 \quad \frac{i-7}{2} \quad k - \frac{i-7}{2}$' ersetzt. Offensichtlich geht diese Zeile aus der ersten Zeile des Abschnitts durch die Ersetzung eines $ik + i - 2$- durch einen $ik + 2i - 4$-Summanden hervor, liefert also als Summe $i - 2$ mehr. Da sie genau $i - 2$ Zeilen hinter der ersten Zeile steht, liefert auch sie die richtige Summe.
Dieses Prinzip setzt sich durch den gesamten dritten Bereich fort — man beachte, dass die Notwendigkeit auszuweichen aufgrund der Konstruktion des dritten Bereichs immer zwei Zeilen früher, also nach $i - 2$ Zeilen auftritt. Ansonsten haben wir es passend mit der Ersetzung von $ik + i - 4$- durch $ik + i - 2$-Summanden (innerhalb der Abschnitte) und mit der Ersetzung von $ik + i - 4$- durch $ik + 2i - 4$-Summanden (zwischen den Abschnitten) zu tun, sodass sich der $+1$-Anstieg bis vor den vierten Bereich fortsetzt.
Im letzten Bereich/Abschnitt müssen wir den Übergang von der dritten zur vierten Zeile kontrollieren, die anderen Übergänge erklären sich aus den bekannten Ersetzungen.
Die dritte Zeile liefert

$$\sigma = \frac{i-3}{2}(ik + i - 4) + \frac{i-3}{2}(ik + i - 2) + k(ik + 2i - 4) = (i - 3)(ik + i - 3) + k(ik + 2i - 4)$$
$$= i^2k + i^2 - 3i - 3ik - 3i + 9 + ik^2 + 2ik - 4k = ik^2 + (i^2 - i - 4)k + i^2 - 6i + 9$$

Die vierte Zeile liefert

$$(k+i-3)(ik+i-4)+ik+i-2 = ik^2+ki-4k+i^2k+i^2-4i-3ik-3i+12+ik+i-2$$
$$= ik^2+(i^2-i-4)k+i^2-6i+10$$

Damit haben wir eingesehen, dass wir innerhalb der gesamten Liste einen durchgängigen $+1$-Anstieg haben.

Es bleibt noch die Gesamtzahl der Zeilen zu bestimmen.
Wir haben schon gesehen, dass der erste Abschnitt $i-4$ und der zweite Abschnitt i Zeilen hat, was sich per Konstruktion auf die anderen Abschnitte im zweiten Bereich fortsetzt. Per Konstruktion hat auch der erste Abschnitt des dritten Bereichs i Zeilen und per Konstruktion auch alle weiteren Abschnitte in diesem Bereich. Im einzigen Abschnitt des vierten Bereichs beginnen wir mit zwei Zeilen Vorlauf, bevor eine neue zweizeilenweise Regelmäßigkeit auftritt. Diese umfasst $2(\frac{i-3}{2}-0)+1=i-2$ Zeilen, also haben bis auf den ersten alle Abschnitte i Zeilen.
Wir müssen also noch zählen, wie viele Abschnitte mit i Zeilen es gibt. Im zweiten Bereich gibt es $k+\frac{i-3}{2}-(i-2)+1=k-\frac{i-3}{2}$ Abschnitte. Im dritten Bereich gibt es $i-3-(i-3-\frac{i-7}{2})+1=\frac{i-5}{2}$. Dazu tritt noch der einzelne Abschnitt im vierten Bereich, macht $k-\frac{i-3}{2}+\frac{i-5}{2}+1=k$ Abschnitte mit i Zeilen. Zusammen hat unsere Liste also $ik+i-4$ Zeilen, genau so viele, wie sie auch haben muss.

Nun zeigen wir wieder, dass $s-1$ nicht als nichtnegative ganzzahlige Linearkombination aus unserem Datensatz zu erhalten ist. Wieder unterscheiden wir dabei nach der Anzahl der verwendeten Summanden.
Wenn wir $k+i-2$ (oder mehr) Summanden verwenden, dann zeigt der letzte Abschnitt, in dem die zweitkleinste Möglichkeit mit $k+i-2$ Summanden vorkommt, dass es völlig unmöglich ist, damit $s-1$ zu erhalten.
Wenn wir $k+i-3$ Summanden verwenden, stellen wir uns wieder vor, wenigstens einen $ik+2i-4$-Summanden zu verwenden. Dann gilt (wir kürzen die Rechnung hier stark ab)

$$\sigma \geq (k+i-4)(ik+i-4)+ik+2i-4 = ik^2+(i^2-2i-4)k+i^2-6i+12 \geq s+1$$

So kann also $s-1$ nicht erreicht werden, wir dürfen also nur die beiden kleinen Summanden verwenden:

$$\sigma = a(ik+i-4)+(i+k-3-a)(ik+i-2) = -2a+ik^2+(i^2-2i-2)k+i^2-5i+6$$

Dies setzen wir gleich $s-1$:

$$-2a+ik^2+(i^2-2i-2)k+i^2-5i+6 = ik^2+(i^2-2i-4)k+i^2-6i+10 \iff -2a+2k+i-4=0$$

Die letzte Gleichung würde aber implizieren, dass i gerade ist, ein Widerspruch. Somit ist es nicht möglich $s-1$ mit $k+i-3$ Summanden ganzzahlig nichtnegativ linear zu kombinieren.
Wenn wir $i+k-4$ (oder weniger) Summanden verwenden, so haben wir

$$\sigma \leq (i+k-4)(ik+2i-4) = ik^2+(i^2-2i-4)k+2i^2-12i+16 = s-1+i^2-6i+6$$

Wir können nun, um diese (sogar für $i=5$) zu große Summe zu mindern, $ik+2i-4$-Summanden durch $ik+i-4$- oder $ik+i-2$-Summanden ersetzen. Dann verringert sich die Summe um i oder um $i-2$. Wenn wir den 'Fehler' i^2-6i+6 also ganzzahlig nichtnegativ durch i und $i-2$ linear kombinieren können, so lassen sich solche Ersetzungen durchführen, andernfalls nicht. Also müsste i^2-6i+6 aus dem Datensatz $\{i,\ i-2\}$ ganzzahlig nichtnegativ linear kombinierbar sein. Dann wäre das $i^2-4i+2=i^2-6i+6+2(i-2)$ aber auch, der letzte Wert liegt aber bekanntlich 1 unter dem Schwellenwert für $\{i,\ i-2\}$, ein Widerspruch.
Also ist $s-1$ unter keinen Umständen ganzzahlig nichtnegativ aus unserem Datensatz linear kombinierbar, und damit ist (iii) gezeigt.

(iv) Wir betrachten zuletzt den Datensatz $\{ik+i-2,\ ik+i,\ ik+2i-2\}$ und haben zu zeigen, dass $s = ik^2 + (i^2-i-2)k + i^2 - 3i + 3$ gilt. Wir beginnen mit der Liste, die belegt, dass beginnend mit s mindestens $ik+i-2$ Zahlen nichtnegativ ganzzahlig linear kombinierbar sind. Erneut hat die Liste nur diese ausführliche Form, wenn i genügend groß ist, für kleine i (wie $i=5$ und $i=7$) fallen einige der von uns aufgeschriebenen Zeilen jeweils zusammen.

$ik+i-2$	$ik+i$	$ik+2i-2$
$k+\frac{i-3}{2}$	$\frac{i-1}{2}$	0
$k-i-3$	0	1
$k+\frac{i-5}{2}$	$\frac{i-1}{2}$	0
$k-i-4$	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k-1$	$i-1$	0
$k+\frac{i-5}{2}$	$\frac{i-1}{2}$	1
$k+i-4$	0	2
$k+\frac{i-7}{2}$	$\frac{i+1}{2}$	1
$k+i-5$	1	2
$k+\frac{i-9}{2}$	$\frac{i-3}{2}$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k-2$	$i-1$	1
$k+\frac{i-7}{2}$	$\frac{i-1}{2}$	2
$k+i-5$	0	3
$k+\frac{i-9}{2}$	$\frac{i+1}{2}$	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k-3$	$i-1$	2
$k+\frac{i-9}{2}$	$\frac{i-1}{2}$	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$i-2$	0	k
$\frac{i-3}{2}\ \frac{i+1}{2}$	$k-1$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$i-1$	$k-1$
$\frac{i-3}{2}$	$\frac{i-1}{2}$	k
$i-3$	0	$k+1$
$\frac{i-5}{2}$	$\frac{i+1}{2}$	k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$i-2$	k

Wir haben wieder zu zeigen, dass die Liste bei s ansetzt und dann von den Summen her jeweils um $+1$ ansteigt.

$$\sigma = (k + \frac{i-3}{2})(ik+i-2) + \frac{i-1}{2}(ik+i)$$
$$= ik^2 + ik - 2k + \frac{1}{2}i^2k + \frac{1}{2}i^2 - i - \frac{3}{2}ik - \frac{3}{2}i + 3 + \frac{1}{2}i^2k + \frac{1}{2}i^2 - \frac{1}{2}ik - \frac{1}{2}i$$
$$= ik^2 - ik - 2k + i^2k + i^2 - 3i + 3 = s$$

Die erste Zeile liefert also die richtige Summe. Für die zweite gilt:

$$\sigma = (k+i-3)(ik+i-2) + ik + 2i - 2$$

$= ik^2 + ik - 2k + i^2k + i^2 - 2i - 3ik - 3i + 6 + ik + 2i - 2 = ik^2 + (i^2 - i - 2)k + i^2 - 3i + 4 = s + 1$

Also liefert auch sie die korrekte Summe.
Ab dann erfolgt im ersten Abschnitt jeweils zweizeilenweise eine Ersetzung eines $ik + i - 2$- durch einen $ik + i$-Summanden, also zweizeilenweise ein Anstieg um $+2$, was insgesamt den $+1$-Anstieg für den ersten Abschnitt bestätigt.
Der erste Abschnitt umfasst $2(\frac{i-1}{2} - 0 + 1) = i + 1$ Zeilen.
Die erste Zeile des zweiten Abschnitts entsteht aus der zweiten des ersten Abschnitts durch die Ersetzung eines $ik + i - 2$- durch einen $ik + 2i - 2$-Summanden, liefert also in der Summe genau i mehr als die i Zeilen vor ihr stehende Zeile und setzt damit den $+1$-Anstieg fort. Die zweite Zeile des zweiten Abschnitts geht aus der letzten Zeile des ersten Abschnitts durch die Ersetzung eines $ik + i - 2$- durch einen $ik + i$-Summanden hervor, hat also eine um $+2$ größere Summe als diese und setzt damit ebenfalls den $+1$-Anstieg fort. Für den Rest des zweiten Abschnitts gilt dann jeweils wieder zweizeilenweise die Ersetzung eines $ik + i - 2$- durch einen $ik + i$-Summanden, weswegen wir auch hier einen ständigen $+1$-Anstieg haben.
Der zweite Abschnit besteht aus $2(k - i - 4 - (k + \frac{i-7}{2})) + 1 = 2(\frac{i-1}{2}) + 1 = i$ Zeilen.
Die weiteren Abschnitte, mit Ausnahme des letzten, ersetzen sukzessive einen $ik + i - 2$-durch einen $ik + 2i - 2$-Summanden, und da sie per Konstruktion alle i Zeilen haben, setzt sich der $+1$-Anstieg somit bis vor den letzten Abschnitt fort.
Dieser setzt die Ersetzung eines $ik + i - 2$- durch einen $ik + 2i - 2$-Summanden und damit den $+1$-Anstieg fort, er muss aber dort enden, wo das nicht weiter möglich ist. In der von uns angegebenen Form hat er $2(\frac{i-5}{2} - 0 + 1) = i - 3$ Zeilen, und bis hierher steigt die Summe σ jeweils um $+1$.
Jeder der Abschnitte vom zweiten bis zum vorletzten hat i Zeilen, und es gibt von diesen Abschnitten $k + i - 4 - (i - 2) + 1 = k - 1$ Stück. Somit umfasst unsere Liste $i + 1 + (k - 1)i + i - 3 = ik + i - 2$ Zeilen, genau so viele wie gefordert. Also sind ab s mindestens $ik + i - 2$ natürliche Zahlen aus dem Datensatz ganzzahlig nichtnegativ linear kombinierbar.

Wir haben erneut zu zeigen, dass $s - 1$ nicht ganzzahlig nichtnegativ aus unserem Datensatz linear zu kombinieren ist, und erneut unterscheiden wir nach der Anzahl der verwendeten Summanden:
Verwenden wir $k + i - 1$ (oder mehr) Summanden, so erhalten wir

$$\sigma \geq (k + i - 1)(ik + i - 2) = ik^2 + ik - 2k + i^2k + i^2 - 2i - ik - i + 2$$

$$= ik^2 + (i^2 - 2)k + i^2 - 3i + 2 = s + k - 1$$

Wegen $k \geq i - 3 \geq 2$ ist σ größer als $s - 1$.
Verwenden wir $k + i - 4$ (oder weniger) Summanden, so gilt:

$$\sigma \leq (k + i - 4)(ik + 2i - 2) = ik^2 + 2ik - 2k + i^2k + 2i^2 - 2i - 4ik - 8i + 8$$

$$= ik^2 + (i^2 - 2i - 2)k + 2i^2 - 8i + 8 = s - 1 - ik + i^2 - 5i + 6$$

Wann ist das kleiner als $s - 1$?

$$-ik + i^2 - 5i + 6 < 0 \iff -ik + i^2 - 5i < -6 \iff k + i - 5 > \frac{6}{i}$$

Da $i \geq 5$ ist die Aussage wahr, wenn wie nach Voraussetzung $k \geq i - 3$ gilt. Unter den gegebenen Voraussetzungen ist σ also zu klein.
Wenn wir genau $k + i - 3$ Summanden verwenden, müssen wir den folgenden Ansatz machen:

$$s - 1 = a(ik + i - 2) + b(ik + i) + (k + i - 3 - a - b)(ik + 2i - 2)$$

$$= aik + ai - 2a + bik + bi + ik^2 + 2ik - 2k + i^2k + 2i^2 - 2i - 3ik - 6i + 6 - aik - 2ai + 2a - bik - 2bi + 2b$$

$$= -ai - b(i - 2) + ik^2 - ik - 2k + i^2k + 2i^2 - 8i + 6 = s - 1 = ik^2 + (i^2 - i - 2)k + i^2 - 3i + 2$$

$$\iff i^2 - 5i + 4 = ai + b(i-2)$$

Wäre der linke Wert aus i und $i-2$ ganzzahlig nichtnegativ linear kombinierbar, so wäre $i^2-4i+2 = i^2+5i+4+(i-2)$ das auch, das ist aber falsch, da wie bekannt i^2-4i+2 um 1 unter dem Schwellenwert für den Datensatz $\{i,\ i-2\}$ liegt.
Nehmen wir zuletzt noch an, $s-1$ wäre mit $k+i-2$ Summanden zu erzielen.
Verwenden wir nur einen $ik+2i-2$-Summanden, so zeigt die zweite Zeile der Liste, dass dann $\sigma \geq s+1$ gilt. Also dürfen wir nur die beiden 'kleinen' Summanden verwenden. Das ergibt den Ansatz:

$$a(ik+i-2) + (k+i-2-a)(ik+i) = aik + ai - 2a + ik^2 + ik + i^2k + i^2 - 2ik - 2i - aik - ai$$

$$= -2a + ik^2 - ik + i^2ki^2 - 2i = s - 1 = ik^2 + (i^2 - i - 2)k + i^2 - 4i + 2$$

$$\iff -2a + 2k + i - 2 = 0$$

Da i ungerade ist, steht auf der linken Seite eine ungerade Zahl, also niemals 0.

Damit haben wir eingesehen, dass $s-1$ nicht ganzzahlig nichtnegativ aus unserem Datensatz linear kombinierbar ist und Satz 7 ist (endlich) bewiesen. $\blacksquare$

Bemerkung:
Der Autor gesteht, einmal davon geträumt zu haben, auf diese Art und Weise den Fall eines dreielementigen Datensatzes komplett klären zu können. Der massive Anstieg von Fallunterscheidungen und technischen Schwierigkeiten beim Übergang von der Situation 'minimaler Abstand 1' zu 'minimaler Abstand 2' scheint aber darauf hinzudeuten, dass diese Aussicht zurecht ins Reich der Träume gehört.

2.4.2 Die Anzahl möglicher Linearkombinationen beim Datensatz $\{n,\ n+2,\ n+i\}$

Wir formulieren unverzüglich den

Satz 8:
Die Zahl x sei aus dem Datensatz ganzzahlig nichtnegativ linear kombinierbar. Dann beträgt die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, das zu tun

$$\sum_{j=\left[\frac{x+n+i-1}{n+i}\right]}^{\left[\frac{x}{n}\right]} \left[\frac{min\left(\left[\frac{j(n+i)-x}{i-2}\right], \left[\frac{x-jn}{2}\right]\right) - ([x-jn]_i \cdot [2]_i^{-1})^*}{i} + 1\right]$$

Beweis:
Die Laufvariable j repräsentiert die Anzahl der Summanden. Nimmt man mehr als $\left[\frac{x}{n}\right]$ Summanden, ist das Resultat echt größer als $\frac{x}{n} \cdot n$, kann also niemals x ergeben. Verwendet man weniger als $\left[\frac{x+n+i-1}{n+i}\right]$ Summanden, erhält man weniger als x. (Der Summand $n+i-1$ ist notwendig, weil er dafür sorgt, dass im Falle, dass die Division $x:(n+i)$ aufgeht, der größte zulässige Wert für j eben genau dieser Quotient wird, im Falle, dass sie nicht aufgeht, muss aber der nächstgrößere Wert gewählt werden, weil dann $\left[\frac{x}{n+i}\right]$ zu klein wäre.)

Fixieren wir nun einen zulässigen Wert für j. Dann haben wir die folgende Situation:

$$(j-a-b) \cdot n + a \cdot (n+2) + b \cdot (n+i) = x$$

$$\iff jn + 2a + ib = x \iff 2a + ib = x - jn(*)$$

Neben der Bedingung (*) haben wir noch die folgenden Nebenbedingungen zu beachten: Damit b positiv bleibt, muss $2a \leq x - jn$ sein, also erhalten wir

$$a \leq \left[\frac{x-jn}{2}\right] \quad (1)$$

Außerdem muss $a + b \leq j$ sein, damit der Koeffizient $(j - a - b)$ positiv bleibt. Aus dieser Bedingung und der Gleichung (*) ergibt sich via Elimination (man ziehe von (*) i-mal die Ungleichung $a + b \leq j$ ab und beachte, dass sich dabei das Ungleichungszeichen umkehrt):

$$-(i-2)a \geq x - j(n+i) \iff a \leq \left[\frac{j(n+i)-x}{i-2}\right] \qquad (2)$$

(1) und (2) sind notwendige $\leq$-Bedingungen für a, man kann sie also derart zusammenfassen, dass man feststellt, dass

$$a \leq min\left(\left[\frac{x-jn}{2}\right], \left[\frac{j(n+i)-x}{i-2}\right]\right)$$

sein muss.

Die Zahl a wählen wir a priori ganzzahlig und nichtnegativ. Wir haben nun a so eingeschränkt, dass auch die beiden anderen Koeffizienten b und $j - a - b$ nichtnegativ sind. Von b wissen wir aber noch nicht, ob b auch ganzzahlig ist. (Ist das der Fall, sind automatisch alle drei Koeffizienten ganzzahlig!) Dazu betrachten wir erneut (*) und reduzieren modulo i. Dann ergibt sich

$$[2a]_i = [x - jn]_i \iff [a]_i = [x - jn]_i \cdot [2]_i^{-1}$$

Solche Bedingungen kennen wir schon, und nach Lemma D gibt es für a dann eben

$$\left[\frac{min\left(\left[\frac{j(n+i)-x}{i-2}\right], \left[\frac{x-jn}{2}\right]\right) - ([x-jn]_i \cdot [2]_i^{-1})^*}{i}\right] + 1$$

Möglichkeiten. Da j fixiert war, liegt b durch die Wahl von a eindeutig fest, die Anzahl der Möglichkeiten für a ist also die Anzahl aller Möglichkeiten.
Es bleibt jetzt nur noch, über die möglichen j zu summieren, um die Gesamtanzahl der Möglichkeiten zu erhalten, was genau unsere oben angegebene Formel liefert. (Man beachte bei ihr wieder, dass Summanden trotz des $+1$ gleich 0 sein können, weil die Gaußklammer in dem Fall, dass der generische Repräsentant größer als das Minimum ist, -1 ergibt. (Niemals weniger, da der generische Repräsentant ja nicht größer als $i - 1$ werden kann)) ∎

Bemerkung: Wir haben in der Formulierung des Satzes vorausgesetzt, dass mindestens eine Darstellung existiert und haben das eher atmosphärisch verwendet, denn theoretisch lassen sich alle Ansätze auch machen, wenn die angesetzten Gleichungen unlösbar sind. Es ist nicht ganz unwahrscheinlich, dass die Formel tatsächlich 0 liefert — eine Summe mit größerer Unter- als Obergrenze muss dann eben wieder als 0 aufgefasst werden —, wenn x nicht darstellbar ist, ob das aber mit dem obigen Vorgehen bewiesen ist, bedürfte weiterer Argumentation.

3 Miszellania

Wir werden noch kurz zwei Datensätze ansehen, die aus der obigen Systematik herausfallen.

3.1 Der Datensatz $\{n,\ n+2,\ n+4\}$.

Hier gibt es zwei vollkommen unterschiedliche Fälle: Der erste ist, dass n gerade ist. Dann gibt es im strengen Sinne keinen Schwellenwert s, weil nur gerade Summen erzielbar sind, alle (unendlich vielen) ungeraden Summen also nicht. Innerhalb der geraden Summen geht man so vor, dass man alle Elemente des Datensatzes halbiert, man erhält dann den Datensatz $\{\frac{n}{2},\ \frac{n}{2}+1,\ \frac{n}{2}+2\}$, über den in Satz 3 alles gesagt worden ist. Man muss den dort erhaltenen Schwellenwert dann verdoppeln, die Anzahl von Möglichkeiten, die sich in Satz 4 für den halben

Summenwert ergibt, muss man hingegen übernehmen.
Dieser Fall ist also durch unsere vorangegangenen Ergebnisse hinreichend geklärt.

Im zweiten Fall ist n ungerade und wir können den Datensatz daher in folgender Weise schreiben: $\{2k+1,\ 2k+3,\ 2k+5\}$. Für diesen Fall haben wir bislang keine Aussagen, werden sie aber umgehend liefern:

3.1.1 Der Schwellenwert beim Datensatz $\{2k+1,\ 2k+3,\ 2k+5\}$

Wir formulieren sofort den

Satz 9:
Der Schwellenwert zum Datensatz $\{2k+1,\ 2k+3,\ 2k+5\}$ beträgt $s = 2k^2 + 3k$.

Beweis:
Wir schreiben wieder unsere Liste auf:

$2k+1$	$2k+3$	$2k+5$
0	k	0
$k+1$	0	0
0	$k-1$	1
k	1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	k
1	k	0

Wegen $k(2k+3) = 2k^2 + 3k = s$ und $(k+1)(2k+1) = 2k^2 + 3k + 1 = s + 1$ liefern die beiden ersten Zeilen die gewünschten Summen, ab dann erfolgt zweizeilenweise entweder die Ersetzung eines $2k+3$- durch einen $2k+5$-Summanden oder die Ersetzung eines $2k+1$- durch einen $2k+3$-Summanden, also haben wir zweizeilenweise einen $+2$-Anstieg und mit unserem Wissen über die beiden Startzeilen insgesamt zeilenweise einen $+1$-Anstieg.
Wir müssen lediglich noch klären, ob die Liste genügend Zeilen hat. Offensichtlich hat sie $2(k-0+1) = 2k+2$ Zeilen, das ist mehr als der Wert des kleinsten Summanden, somit sind ab s alle natürlichen Zahlen ganzzahlig nichtnegativ aus dem Datensatz linear kombinierbar.

Wir haben noch zu zeigen, dass $s - 1 = 2k^2 + 3k - 1$ *nicht* ganzzahlig nichtnegativ aus dem Datensatz linear kombiniert werden kann.
Wenn wir dafür $k-1$ oder weniger Summanden verwenden, gilt:

$$\sigma \leq (k-1)(2k+5) = 2k^2 + 3k - 5 < s - 1$$

Wenn wir dafür $k+1$ Summanden verwenden, zeigt die obige Liste, dass dann $\sigma \geq s+1 > s-1$ gilt; beide Anzahlen von Summanden sind also ungeeignet, um $s-1$ zu erhalten.
Bleibt nur noch, es mit k Summanden zu versuchen, dazu machen wir den allgemeinen Ansatz:

$$(k-a-b)(2k+1) + a(2k+3) + b(2k+5) = 2k^2 + k + 2a + 4b = s - 1 = 2k^2 + 3k - 1$$

$$\iff 2a + 4b = 2k - 1$$

Da alle Variablen ganze Zahlen sind, steht auf der linken Seite der Gleichung eine gerade, auf der rechten eine ungerade Zahl; die Gleichung ist also niemals ganzzahlig erfüllbar.
Somit ist $s-1$ nicht ganzzahlig nichtnegativ aus dem Datensatz linear kombinierbar und die Behauptung ist bewiesen. ∎

3.1.2 Die Anzahl der Möglichkeiten beim Datensatz $\{2k+1,\ 2k+3,\ 2k+5\}$

Obwohl alles (fast) so abläuft wie gewohnt, wird es eine prinzipielle Änderung geben, wir werden in der zu erwartenden Summe ungefähr die Hälfte der Summandenanzahlen j ausschließen. Das rührt daher, dass alle unsere Daten ungerade Zahlen sind; und es ist eben z.B. nicht möglich, aus einer geraden Anzahl ungerader Zahlen eine ungerade Summe zu erhalten.
Unser Resultat formuliert sich daher minimal komplizierter:

Satz 10:
Die Anzahl an Möglichkeiten, die Zahl x (falls sie überhaupt erzielbar ist), als nichtnegative ganzzahlige Linearkombination aus dem Datensatz $\{2k+1,\ 2k+3,\ 2k+5\}$ zu erhalten, beträgt

$$\sum_{j=\left[\frac{x+2k+4}{2k+5}\right];[j]_2=[x]_2}^{\left[\frac{x}{2k+1}\right]} \left[\frac{min\left(\frac{x-j(2k+1)}{2}, \left[\frac{j(2k+5)-x}{2}\right]\right) - \left[\frac{x-j(2k+1)}{2}\right]_2^*}{2}\right] + 1$$

Beweis:
Wir setzen an:

$$x = (j-a-b)(2k+1) + a(2k+3) + b(2k+5) = j(2k+1) + 2a + 4b$$

Daraus ergibt sich

$$2a + 4b = x - j(2k+1)$$

Da die linke Seite sicher gerade ist, muss dies auch die rechte sein, und da $[2k+1]_2 = [1]_2$ ist, folgt, dass $[x]_2 = [j]_2$ sein muss. Daraus resultiert die Einschränkung bei der Laufvariablen der Summe.
Sowie das aber garantiert ist, kann man durch 2 dividieren, ohne die Ganzzahligkeit zu verlieren:

$$a + 2b = \frac{x - j(2k+1)}{2}$$

Damit b nichtnegativ ist, muss dann

$$a \le \frac{x - j(2k+1)}{2}$$

gelten. Damit auch $j-a-b$ nichtnegativ ist, muss $a + b \le j$ sein, um damit ergit sich per Subtraktion

$$-a \ge \frac{x - j(2k+1)}{2} - 2j = \frac{x - j(2k+5)}{2} \iff a \le \left[\frac{j(2k+5) - x}{2}\right]$$

Insgesamt muss a also größergleich 0 sein und kleinergleich dem Minimum der beiden bislang gefundenen Grenzen, dann sind alle drei Koeffizienten nichtnegativ.
Damit b — und in der Folge auch $j-a-b$ — ganzzahlig sind, muss noch

$$[a]_2 = \left[\frac{x - j(2k+1)}{2}\right]_2$$

gelten. Also gibt es nach Lemma D für jedes in Frage kommende j genau

$$\left[\frac{min\left(\frac{x-j(2k+1)}{2}, \left[\frac{j(2k+5)-x}{2}\right]\right) - \left[\frac{x-j(2k+1)}{2}\right]_2^*}{2}\right] + 1$$

Möglichkeiten.
Nach der notwendigen Summation ergibt sich die obige Formel. ∎

3.2 Der Datensatz $\{n,\ n+1,\ n+2,\ n+3\}$

Abschließend untersuchen wir noch den einfachsten aus 4 Zahlen bestehenden Datensatz, und er wird mit den von uns entwickelten Methoden relativ einfach zu behandeln sein. Wir starten sofort mit

Satz 11:
Es sei $n = 3k + t$, mit $t \in \{0;\ 1;\ 2\}$, dann kann man den Datensatz mit geeignetem t schreiben als $\{3k+t,\ 3k+t+1,\ 3k+t+2,\ 3k+t+2\}$ und dann hat der Schwellenwert s den Wert $s = 3k^2 + tk$, falls $t = 0$ oder $t = 1$ ist, und $s = 3k^2 + 5k + 2$, falls $t = 2$ ist.

Beweis:
Um zu zeigen, dass ab s mindestens $n = 3k + t$ Zahlen nichtnegativ ganzzahlig linear kombinierbar sind, geben wir wieder eine Liste an, die diesmal besonders einfach ausfällt. Wir beginnen mit $t = 0$ und $t = 1$:

$3k+t$	$3k+t+1$	$3k+t+2$	$3k+t+3$
k	0	0	0
$k-1$	1	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	k	0	0
0	$k-1$	1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	k	0
0	0	$k-1$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	0	k

Der $+1$-Anstieg ist trivial, weil bei Übergang zur nächsten Zeile stets ein Summand durch einen um 1 größeren Summanden ersetzt wird. Und ganz offensichtlich hat die Liste $3k+1$ Zeilen, also genügend viele. (Hierin liegt übrigens die Sonderrolle des Falles $t = 2$ begründet).
Für diesen Fall verwenden wir eine ganz ähnliche Tabelle:

$3k+2$	$3k+3$	$3k+4$	$3k+5$
$k+1$	0	0	0
k	1	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	$k+1$	0	0
0	k	1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	$k+1$	0
0	0	k	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
0	0	0	$k+1$

Wegen $(3k+2)(k+1) = 3k^2 + 6k + 2 = s$ hat die Liste den richtigen Startsummenwert, aus dem gleichen Grunde wie zuvor ist der $+1$-Anstieg von Zeile zu Zeile gegeben und diese Liste hat genau $3k+4$ Zeilen, also ausreichend viele.

Nun zeigen wir noch, dass $s-1$ nicht nichtnegativ ganzzahlig linear kombinierbar ist.
Sei dafür wieder zuerst $t = 0$ oder $t = 1$. Dann ist $s - 1 = 3k^2 + tk - 1$. Die erste unserer beiden Listen

zeigt, dass k Summanden (und damit auch mehr Summanden) immer zuviel liefern. Andererseits gilt für $k-1$ oder weniger Summanden:

$$\sigma \leq (k-1)(3k+t+3) = 3k^2+tk+3k-3k-t-3 = 3k^2+tk-t-3$$

und das ist stets weniger als $s-1 = 3k^2+tk-1$.
Folglich kann $s-1$ nicht ganzzahlig nichtnegativ aus dem Datensatz linear kombiniert werden.
Für $t=2$ ist $s-1 = 3k^2+5k+1$.
Die zweite Liste zeigt, dass mit $k+1$ Summanden (oder mehr) mindestens s erzielt wird.
Verwendet man k oder weniger Summanden erhält man

$$\sigma \leq k \cdot (3k+5) = 3k^2+5k < s-1$$

also zu wenig.
Somit kann auch in diesem Fall $s-1$ nicht als nichtnegative ganzzahlige Linearkombination aus dem Datensatz erzeugt werden, und damit ist unser Satz bewiesen. ∎

3.2.1 Die Anzahl der Möglichkeiten beim Datensatz $\{n,\ n+1,\ n+2,\ n+3\}$

Wir formulieren unverzüglich den

Satz 12:
Es sei x eine aus dem Datensatz ganzzahlig nichtnegativ linear kombinierbare natürliche Zahl. Dann gibt es dafür

$$\sum_{j=\left[\frac{x+n+2}{n+3}\right]}^{\left[\frac{x}{n}\right]} \sum_{a=0}^{min(x-jn,j,\left[\frac{(n+3)j-x}{2}\right])} \left[\frac{min(j-a,(n+3)j-x-2a,\left[\frac{x-jn-a}{2}\right]) - ([x-jn-a]_3 * [2]_3)^*}{3}\right] + 1$$

verschiedene Möglichkeiten.

Beweis:
Wir machen den üblichen Ansatz:

$$(j-a-b-c)n + a(n+1) + b(n+2) + c(n+3) = x \iff a+2b+3c = x-jn$$

Dabei muss j wie gehabt mindestens $\left[\frac{x+n+2}{n+3}\right]$ sein, sonst fällt die Summe kleiner als x aus, und j darf höchstens $\left[\frac{x}{n}\right]$ sein, sonst fällt die Summe zu groß aus.
Da $a+2b+3c = x-jn$ sein muss und weder b noch c negativ sein dürfen, muss a sicher kleinergleich $x-jn$ sein (und selbstverständlich größergleich 0). Aber wegen $a+b+c \leq j$ darf a auch nicht größer als j sein, es muss also kleinergleich dem Minimum von $x-jn$ und j selbst sein. Das erklärt die Grenzen der inneren Summe.
Wir untersuchen nun jeweils die Möglichkeiten für den Koeffizienten b — j und a betrachten wir als fest — und befinden uns dabei großteils in gewohntem Fahrwasser:

$$2b+3c = x-jn-a \qquad\qquad b+c \leq j-a$$

Daraus ergibt sich, indem wir die zweite Zeile dreifach von der ersten subtrahieren

$$-b \geq x-j(n+3)+2a \iff b \leq (n+3)j-x-2a$$

Da b ja nichtnegativ sein muss, folgt $(n+3)j-x-2a \geq 0 \iff a \leq \left[\frac{(n+3)j-x}{2}\right]$ impliziert.
Damit in der Gleichung $2b+3c = x-jn-a$ der Koeffizient c sicher nichtnegativ ist, muss $b \leq \left[\frac{x-jn-a}{2}\right]$ sein.
Wir haben also drei Kleinergleich-Bedingungen für b, die zusammen sicherstellen, dass alle Koeffizienten

im oben stehenden Ansatz nichtnegativ sind. j und a sind per Konstruktion ganzzahlig und für b wird das gleichfalls gelten, weil unsere Formel wie gehabt nur ganze b zählt, aber wir müssen noch sicherstellen, dass der dann sich arithmetisch ergebene Koeffizient c gleichermaßen ganzzahlig ist. Dazu muss

$$[2b]_3 = [x - jn - a]_3 \iff [b]_3 = [x - jn - a]_3 \cdot [2]_3^{-1} = [x - jn - a]_3 \cdot [2]_3$$

sein. Und damit gibt es wie gehabt für b genau

$$\left[\frac{min(j - a, (n+3)j - x - 2a, \left[\frac{x-jn-a}{2}\right]) - ([x - jn - a]_3 * [2]_3)^*}{3} \right] + 1$$

verschiedene Möglichkeiten. Summiert man nun zuerst über a und dann über j, erhält man die Gesamtzahl an Möglichkeiten, wie oben angegeben. ∎

Bemerkung:

Es ist davon auszugehen, dass die drei $\leq$-Bedingungen redundant sind und auf zwei Bedingungen reduziert werden könnten. Aber sie tun ja auch nicht weh...