

# Lösungen zum Tag der Kombinatorik

## Aufgabe 1

a) a1) Lösung: 81

**Herleitung:**

Nach dem entsprechenden Satz der Vorlesung gibt es genau  $(n - k + 1)^2$  physisch verschiedene Möglichkeiten zur Platzierung eines  $k \times k$ -Quadrates in einem  $n \times n$ -Quadrat, konkret also  $(11 - 3 + 1)^2 = 9^2 = 81$ .

a2) Lösung: 5936

**Herleitung:**

Nach dem Satz aus der Vorlesung gibt es genau

$$A_k(n) = \frac{1}{2}(n^4 - (4k - 4)n^3 + (2k^2 - 8k + 5)n^2 + (8k^3 - 10k^2 + 2)n - 8k^4 + 20k^3 - 16k^2 + 4k)$$

Möglichkeiten, zwei  $k \times k$ -Quadrate in einem  $n \times n$ -Quadrat zu platzieren; mit  $n = 10$  und  $k = 2$  ergibt sich die angegebene Zahl.

a3) Lösung: 2940

**Herleitung:** wie a2)

a4) Lösung: 240240

**Herleitung:**

Nach dem Satz aus der Vorlesung gibt es genau

$$\frac{1}{6}n^6 - n^5 - 2n^4 + \frac{62}{3}n^3 - \frac{73}{6}n^2 - \frac{305}{3}n + 140$$

Möglichkeiten, drei  $2 \times 2$ -Quadrate in einem  $n \times n$ -Quadrat zu platzieren. Einsetzen von  $n = 12$  liefert die angegebene Zahl.

a5) Lösung: 15

**Herleitung:**

Wir haben hier den Fall, dass  $k$  und  $n$  denselben Zweierrest, nämlich 0, haben, also gilt die Formel

$$\frac{(n - k + 1)^2 + 4(n - k) + 7}{8}$$

Setzt man in diese  $n = 10$  und  $k = 2$  ein, erhält man die angegebene Zahl.

a6) Lösung: 6

**Herleitung:**

Hier haben  $n$  und  $k$  verschiedenen Zweierrest, also gilt die Formel

$$\frac{(n - k + 1)^2 + 2(n - k + 1)}{8}$$

Setzt man dann  $n = 10$  und  $k = 5$  ein, erhält man die angegebene Zahl.

a7) Lösung: 15

**Herleitung:** wie a6)

a8) Lösung: 10

**Herleitung:** wie a5)

a9) Lösung: 75

**Herleitung:**

Wir haben hier den Fall, dass  $n$  ungerade und  $k$  gerade ist, also gilt nach der Vorlesung

$$A_k(n) = \frac{1}{6}n^4 - \left(\frac{1}{4}k - \frac{1}{4}\right)n^3 + \left(\frac{1}{8}k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{3}{4}\right)n^2 + \left(\frac{1}{2}k^3 - \frac{5}{8}k^2 - \frac{3}{2}k + \frac{5}{4}\right)n - \frac{1}{2}k^4 + \frac{5}{4}k^3 + \frac{1}{4}k^2 - \frac{7}{4}k + \frac{11}{16}$$

Setzt man in diese  $n = 7$  und  $k = 2$  ein, erhält man die angegebene Zahl.

**a10) Lösung: 21****Herleitung:**

Hier sind  $n$  und  $k$  ungerade, also gilt hier die Formel

$$A_k(n) = \frac{1}{6}n^4 - \left(\frac{1}{4}k - \frac{1}{4}\right)n^3 + \left(\frac{1}{8}k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{7}{8}\right)n^2 + \left(\frac{1}{2}k^3 - \frac{5}{8}k^2 - 2k + \frac{13}{8}\right)n - \frac{1}{2}k^4 + \frac{5}{4}k^3 + \frac{3}{4}k^2 - \frac{5}{2}k + \frac{15}{16}$$

Wiederum liefert Einsetzen von  $n = 7$  und  $k = 3$  die angegebene Zahl.

**a11) Lösung: 147****Herleitung:**

Hier sind  $n$  und  $k$  gerade, also gilt hier die Formel

$$A_k(n) = \frac{1}{6}n^4 - \left(\frac{1}{4}k - \frac{1}{4}\right)n^3 + \left(\frac{1}{8}k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{7}{8}\right)n^2 + \left(\frac{1}{2}k^3 - \frac{5}{8}k^2 - 2k + \frac{7}{4}\right)n - \frac{1}{2}k^4 + \frac{5}{4}k^3 + \frac{3}{4}k^2 - \frac{5}{2}k + 1$$

Auch hier muss man lediglich  $n = 8$  und  $k = 2$  einsetzen, um die angegebene Zahl zu erhalten.

**a12) Lösung: 53****Herleitung:**

Hier ist  $n$  gerade und  $k$  ungerade, also gilt hier die Formel

$$A_k(n) = \frac{1}{6}n^4 - \left(\frac{1}{4}k - \frac{1}{4}\right)n^3 + \left(\frac{1}{8}k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{3}{4}\right)n^2 + \left(\frac{1}{2}k^3 - \frac{5}{8}k^2 - \frac{3}{2}k + \frac{11}{8}\right)n - \frac{1}{2}k^4 + \frac{5}{4}k^3 + \frac{1}{4}k^2 - \frac{7}{4}k + \frac{3}{4}$$

Und Einsetzen von  $n = 8$  und  $k = 3$  liefert die angegebene Zahl.

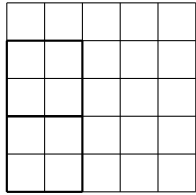
**b) Lösung: 3612****Herleitung:**

Wir stellen uns vor, dass es sich nicht um ein **Quadrupel**, sondern um zwei Paare handelt, diese werden dann Punktkoordinaten von zwei Punkten. Verschieben wir die Grenzen von  $1 \dots 10$  auf  $0 \dots 9$  so sind wir in der Situation der zu füllenden **Quadrate**. Fassen wir nun die Punkte  $(z_1, z_2)$  und  $(z_3, z_4)$  als LUP von zwei  $2 \times 2$ -**Quadraten** auf, so wird Bedingung (ii) genau zu der Bedingung, dass sie sich nicht durchdringen dürfen. Laut der Formel aus **a2)** gibt es genau 1806 solche Platzierungen. Hier erhalten wir die doppelte Zahl, weil es in der geometrischen Situation keinen Unterschied macht, wer das erste und wer das zweite kleine **Quadrat** war, in der Situation eines geordneten **Quadrupels** macht das aber sehr wohl einen Unterschied, sodass wir das Ergebnis noch mit 2 multiplizieren müssen.

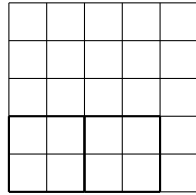
## Aufgabe 2

Wir werden die Teilaufgaben hier gemeinsam lösen, indem wir pro 'Zeile' mögliche Repräsentanten angeben, und unter dem Bild dann sagen, wie viele Elemente die Bahn des Repräsentanten hat und ob Färbung zu verschiedenen Möglichkeiten führt (Letzteres mit ja/nein).

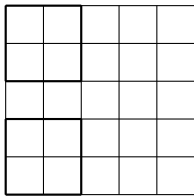
**Lösung:**



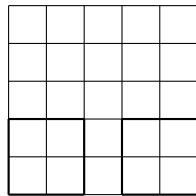
oder



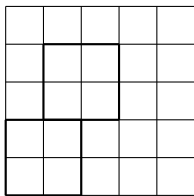
8 physisch verschiedene Exemplare; ja



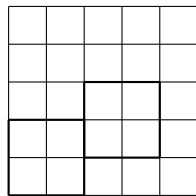
oder



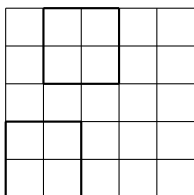
4; nein



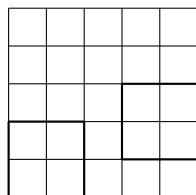
oder



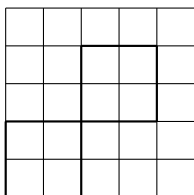
8; ja



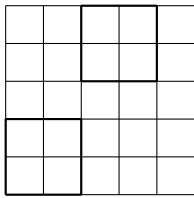
oder



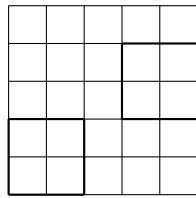
8; ja



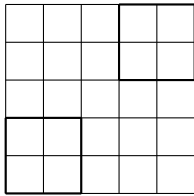
4; ja



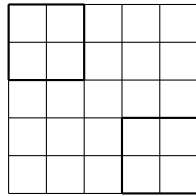
oder



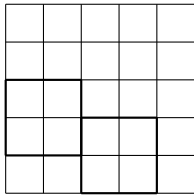
8; ja



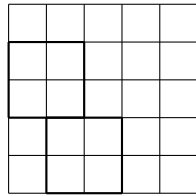
oder



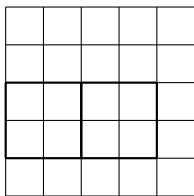
2; nein



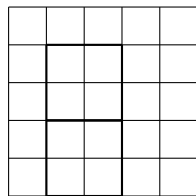
oder



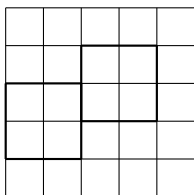
8; ja



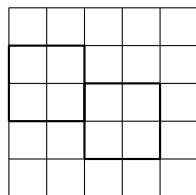
oder



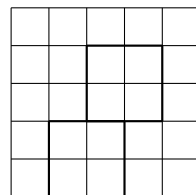
8; ja



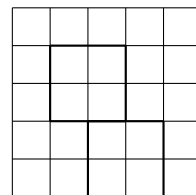
oder



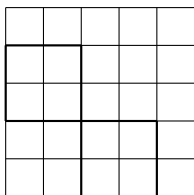
oder



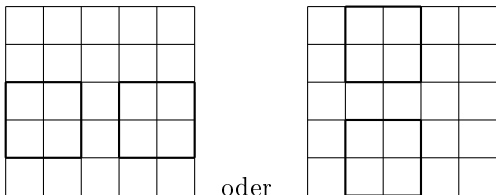
oder



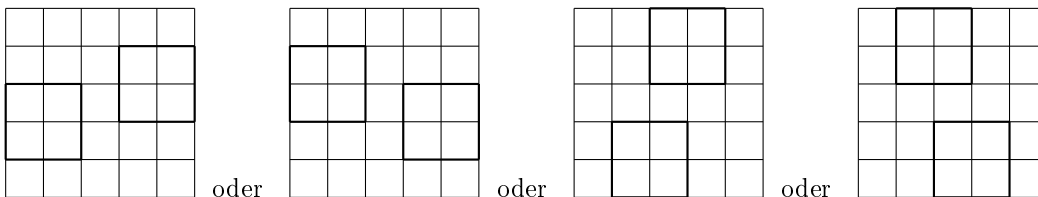
8; ja



4; nein



4; nein



4; nein

**Herleitung:**

Zu den Bildern selbst ist zu sagen, dass die Formel genau 13 geometrisch verschiedene Platzierungen liefert. Von da ab ist es am günstigsten, auszuprobieren und die Quadrate in einer festen Reihenfolge 'wandern' zu lassen — man muss dabei natürlich ein Auge für evtl. mehrfach auftretende physisch verschiedene, aber geometrisch gleiche Platzierungen haben. Einen Repräsentanten mit minimaler Koordinatensumme der LUPs findet man, beginnt man links unten mit der 'Wanderung', mit wenigen Ausnahmen automatisch. Gegebenenfalls muss man eben alle Symmetrien anwenden und dann einfach rechnen.

Die Länge der Bahnen, sprich die Anzahl möglicher Repräsentanten erhält man entweder per Probieren — sehr aufwändig — oder besser, indem man sich überlegt, wie viele Symmetrien des großen Quadrats die jeweilige Platzierung fest lassen, und dann 8 durch deren Zahl teilt. (Index der Stabilisatorgruppe, siehe das Unterkapitel über das Bahnenlemma).

Auf die Frage nach der Verschiedenheit der Färbungen lautet die Antwort immer dann 'nein', wenn es eine Symmetrie des großen Quadrats gibt, die die beiden kleinen Quadrate austauscht, wenn sie also bezüglich einer dieser Symmetrien ein Urbild-Bild-Paar sind. Das ist nie der Fall, wenn nur *id* die Konstellation stabilisiert — es gibt dann einfach keine Abbildung, die das tun könnte —, denn die äußere Situation muss ja stabilisiert werden, nur die Farben, d.h. die kleinen Quadrate müssen ausgetauscht werden. In allen anderen Situationen mit weniger als 8 Repräsentanten ist das der Fall, mit der großen Ausnahme der in unserer Zählung 5. Situation. Zwar wird diese Platzierung von (genau)  $s_{Hd}$  (und *id*) stabilisiert, aber dabei bleiben beide kleinen Quadrate für sich fest, es findet also kein Austausch der Farben statt.

### Aufgabe 3

a) **Lösung:** 455

**Herleitung:**

Laut Vorlesung gibt es genau  $\binom{n+k-1}{k-1}$  geordnete Partitionen mit  $k$  Summanden zur Summe  $n$ ; konkret hier also  $\binom{12+4-1}{4-1} = \binom{15}{3} = 455$  solcher Partitionen.

b) **Lösung:** 84

**Herleitung:**

Man mache sich lediglich klar, dass zu jeder solchen Partition via Division durch 2 in eindeutiger Weise eine beliebige geordnete Partition der Zahl 6 gehört, und wende den Satz der Vorlesung auf diese neue Situation an. Dann erhält man sofort  $\binom{9}{3} = 84$ .

c) **Lösung:** 35

**Herleitung:**

Wir nehmen uns eine solche Partition vor. Alle ihre Summanden sind mindestens 1. Subtrahieren wir also von jedem Summanden die Zahl 1, so haben wir eine zugehörige Partition der Zahl 8 mit 4 geraden Summanden, und deren Gesamtzahl ist offensichtlich gleich. Von Letzteren gibt es aber nach **b)** gleich viele wie es beliebige geordnete Partitionen der Zahl 4 mit 4 Summanden gibt, das sind laut Formel  $\binom{4+4-1}{4-1} = \binom{7}{3} = 35$ .

d) **Lösung:** 46

**Herleitung:**

Es gibt drei prinzipielle Möglichkeiten: Die Summe kann einen, zwei oder drei Summanden haben.

Für den ersten Fall gibt es genau eine Möglichkeit, nämlich 10 selbst.

Für den zweiten Fall gibt es laut Vorlesung  $\binom{11}{1} = 11$  Möglichkeiten, von denen wir aber die beiden streichen müssen, die den Summanden 0 enthalten, nämlich  $10 + 0$  und  $0 + 10$ , bleiben also 9 Möglichkeiten.

Falls die Summe 3 Summanden hat, deren jeder mindestens 1 sein muss, ist die pro Summand um 1 reduzierte Summe eine geordnete Partition der Zahl 7 mit drei Summanden ohne weitere Einschränkungen, davon gibt es nach Vorlesung genau  $\binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$  Möglichkeiten.

Zusammen ergeben sich genau 46 Möglichkeiten.

e) **Lösung:** 1891

**Herleitung:**

Das arme überfallene Land ist also in 60 Tranchen aufgeteilt, die nun verteilt werden. Wir haben also jeweils Summen aus drei Anzahlen, die zusammen 60 ergeben müssen. 0 kann als Summand vorkommen und da es ja nicht unerheblich ist, *welches* der drei Länder wie viel bekommt, sind diese Summen auch geordnet, es handelt sich also um waschechte geordnete Partitionen von 60 mit 3 Summanden, davon gibt es  $\binom{60+3-1}{3-1} = \binom{62}{2} = 1891$  verschiedene.

## Aufgabe 4

a) **Lösung:** 37

**Herleitung:**

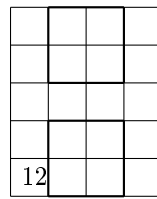
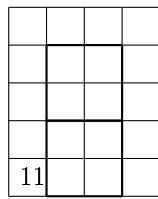
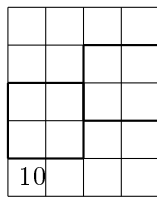
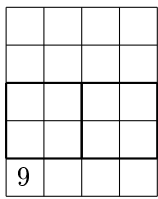
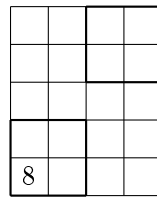
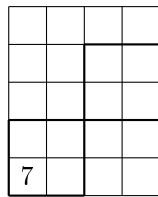
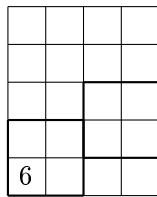
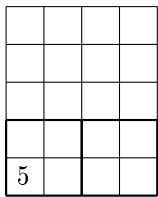
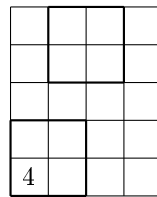
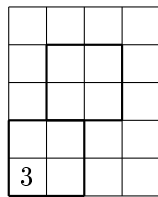
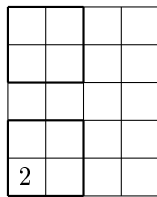
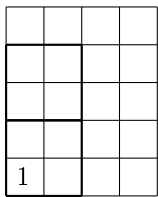
Wir betrachten das Rechteck als  $4 \times 4$ -Quadrat mit einem aufgesetzten  $4 \times 1$ -Streifen und scheiden drei prinzipielle Fälle:

1. Beide kleinen Quadrate befinden sich im  $4 \times 4$ -Quadrat. Dafür gibt es laut Vorlesung (in die Formel einsetzen) 16 Möglichkeiten.
2. Eines der kleinen Quadrate befindet sich am oberen Rand des Rechtecks.  
Hier müssen wir erneut scheiden:
  - (a) Es befindet sich im linken oberen Eck. Dann hat das zweite Quadrat 6 Möglichkeiten im Bereich unter dem gesetzten Quadrat und eine halb neben ihm, ergibt 7 Möglichkeiten.
  - (b) Es befindet sich in der Mitte des oberen Rands. Dann gibt es nur die 6 Möglichkeiten im Bereich unter ihm.
  - (c) Es befindet sich im rechten oberen Eck des Rechtecks. Dann gibt es aus Symmetriegründen wieder 7 Möglichkeiten.
3. Beide Quadrate befinden sich am oberen Rand. Dafür gibt es offensichtlich nur genau 1 Möglichkeit.

Da sich alle diese Möglichkeiten gegenseitig ausschließen, müssen wir nur noch addieren, und das ergibt 37.

b) **Lösung:** 13

Nun die Repräsentanten:



13			

**Herleitung:**

Entweder zeichnet man sich alle 37 physisch verschiedenen Fälle auf und sortiert. Oder man zeichnet so lange geometrisch verschiedene Repräsentanten und addiert die Anzahlen der physisch verschiedenen, aber geometrisch gleichen auf, bis man 37 erzielt.

Beide Verfahren liefern das oben angegebene Ergebnis.

Eine theoretische Behandlung des Problems — wie in der Vorlesung — ist einem so 'kleinen' Spezialfall nicht angemessen.

**c) Lösung:**  $n^2 - n$

**Herleitung:**

Wir müssen lediglich die möglichen LUP zählen. Deren  $x$ -Koordinaten können von  $0 \dots n-2$  variieren, ihre  $y$ -Koordinaten von  $0 \dots n-1$ , es gibt also jeweils  $n-1$  bzw.  $n$  Möglichkeiten, zusammen  $(n-1) \cdot n = n^2 - n$  Möglichkeiten.

**d) Lösung:**

ohne Berührung des oberen Rands:  $\frac{1}{2}(n^4 - 4n^3 - 3n^2 + 26n - 24) = \frac{1}{2}n^4 - 2n^3 - \frac{3}{2}n^2 + 13n - 12$

eines am oberen Rand:  $n^3 - 3n^2 + 4$

beide am oberen Rand:  $\binom{n-2}{2} = \frac{(n-2)(n-3)}{2} = \frac{1}{2}(n^2 - 5n + 6) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 3$

gesamt:  $\frac{1}{2}n^4 - n^3 - 4n^2 + \frac{21}{2}n - 5$

**Herleitung:**

Das erste Resultat entsteht, wenn man in der Formel für  $A_k(n)$  einfach  $k = 2$  einsetzt.

Das zweite Resultat leitet sich folgendermaßen her: Man muss ein Quadrat am oberen Rand wählen, das dadurch vom anderen ausgezeichnet ist, und eines unterhalb des oberen Randes, also innerhalb des darunter liegenden  $n \times n$ -Quadrats sich befinden muss, wofür es jeweils  $(n-1)^2$  Möglichkeiten gibt. Aber da die Quadrate sich nicht durchdringen dürfen, sperrt jedes Eckquadrat 2 dieser Möglichkeiten und jedes innere Randquadrat 3, von den inneren gibt es  $n-3$  Stück, somit erhalten wir

$$2((n-1)^2 - 2) + (n-3)((n-1)^2 - 3) = n^3 - 3n^2 + 4$$

Möglichkeiten.

Das dritte Resultat leitet sich ebenfalls aus einer bekannten Überlegung her: Wir müssen zwei Quadrate durchdringungsfrei am oberen Rand, der die Länge  $n$  hat, platzieren. Die Platzierung ist eindeutig durch die folgenden drei Abgaben beschrieben: den Abstand des linken Quadrats vom linken Rand, den Abstand der beiden Quadrate voneinander und den Abstand des rechten Quadrats vom rechten Rand. Diese drei Werte stellen eine geordnete Partition der Zahl  $n-4$  — so viel Platz ist nämlich da, wenn man die beiden Quadrate abrechnet — mit drei Summanden, von diesen gibt es laut Vorlesung

$$\binom{n-4+3-1}{3-1} = \binom{n-2}{2} = \frac{(n-2)(n-3)}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{5}{2}n + 3 \text{ Stück.}$$

Die vierte Zahl ist die Summe der drei vorangehenden.

## Aufgabe 5

a) Lösung: 24

**Herleitung:**

Es gibt zwei prinzipiell verschiedene Fälle: Entweder steht oder liegt die Schindel. Aus Symmetriegründen (Spiegelung an der Haupt- oder Nebendiagonalen) gibt es in beiden Fällen gleich viele Möglichkeiten.

Also untersuchen wir nun die mögliche Anzahl stehender Schindeln. Für die Koordinaten ihres LUP gilt, dass die  $x$ -Koordinate von  $0 \dots 3$ , die  $y$ -Koordinate von  $0 \dots 2$  variieren kann. Somit gibt es insgesamt  $4 \cdot 3 = 12$  Möglichkeiten.

Das Ganze mal 2 ergibt 24.

b) Lösung: 4

**Herleitung:**

Wir geben einfach 4 Repräsentanten — alle mit stehender Schindel — an sowie die Anzahl der zu ihnen geometrisch gleichen Platzierungen, wenn die Summe dieser Zahlen 24 ergibt, haben wir alle geometrisch verschiedenen gefunden.

Repräsentant 1: Die Schindel hat den LUP  $(0|0)$ . Offensichtlich sind alle anderen mit Ecklage zu dieser geometrisch gleich. Die stehenden spiegle man mit  $s_V$ ,  $s_H$  oder drehe mit  $d_{180^\circ}$ . Die liegenden erhält man (z.B.) mit  $d_{90^\circ}$ . Also deckt dieser Repräsentant 8 physisch verschiedene Fälle ab.

Repräsentant 2: Die Schindel hat den LUP  $(1|0)$ . Man überzeugt sich leicht davon, dass diese Platzierung von keiner Symmetrie des Quadrats außer  $id$  stabilisiert wird, also steht auch dieser Repräsentant für 8 physisch verschiedene Exemplare.

Repräsentant 3: Die Schindel hat den LUP  $(0|1)$ . Diese Platzierung wird von  $id$  und  $s_H$  stabilisiert, also gibt es hier  $\frac{8}{2} = 4$  physisch verschiedene Exemplare, die zu diesem geometrisch gleich sind.

Repräsentant 4: Die Schindel hat den LUP  $(1|1)$ . Auch diese Platzierung wird von  $id$  und  $s_H$  stabilisiert, also gibt es wieder 4 physisch verschiedene Exemplare.

Mittlerweile haben wir  $8 + 8 + 4 + 4 = 24$  physisch verschiedene Exemplare erfasst, also alle.

c) Lösung: 224

**Herleitung:**

Wir unterscheiden hier 3 Fälle:

1. Beide Schindeln stehen.

Falls die erste Schindel sich am unteren oder oberen Rand befindet, blockiert sie 2 mögliche Plätze, falls sie sich in  $y$ -Richtung in der Mitte befindet, blockiert sie 3 mögliche Plätze für die zweite Schindel. Wir haben also insgesamt

$$8 \cdot (12 - 2) + 4 \cdot (12 - 3) = 116$$

Möglichkeiten. Jedoch sind die erste und die zweite Schindel austauschbar, wir haben also jede Möglichkeit doppelt gezählt, verbleiben 58 mögliche Platzierungen.

2. Eine Schindel steht, eine Schindel liegt.

Hier können wir o.B.d.A. die erste Schindel als die stehende annehmen. Falls diese sich am linken oder rechten Rand befindet, sperrt sie zwei der zwölf Möglichkeiten für die liegende Schindel, falls sie sich in Links-Rechts-Richtung in der Mitte befindet, sperrt sie sogar 4 Möglichkeiten. In beiden Fällen gibt es 6 Möglichkeiten für die erste Schindel, das ergibt zusammen

$$6 \cdot (12 - 2) + 6 \cdot (12 - 4) = 108$$

Möglichkeiten. Da hier die beiden Schindeln wohlunterschieden sind, kommen hier keine Mehrfachzählungen vor.

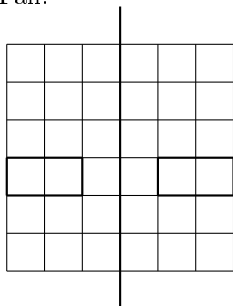
3. Beide Schindeln liegen.

Aus Symmetriegründen (Spiegelung an der Hauptdiagonalen) muss sich hier die gleiche Zahl ergeben wie im ersten Fall.

Wir haben also insgesamt  $58 + 108 + 58 = 224$  Möglichkeiten.

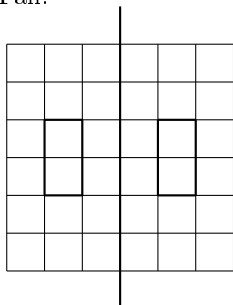
d) d1) Lösung:  $6n^2 - 4n$

1. Fall:



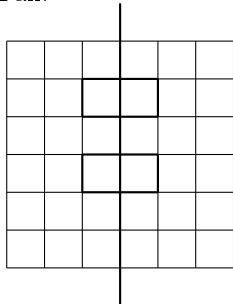
Anzahl:  $2n^2 - 2n$

2. Fall:



Anzahl:  $2n^2 - n$

3. Fall:



Anzahl:  $2n^2 - n$

**Herleitung:**

Die drei Situationen sind, verbal beschrieben, erstens zwei liegende Schindeln, die bezüglich der Spiegelung ein Urbild-Bild-Paar sind, zweitens zwei stehende Schindeln, die bezüglich der Spiegelung ein Urbild-Bild-Paar sind und drittens zwei liegende Schindeln, die beide unter der Spiegelung fest bleiben.

Im ersten Fall muss eine der beiden Schindeln zur Gänze links der Symmetrieachse liegen, die andere Schindel liegt dann eindeutig fest; wir müssen also nur die Möglichkeiten für die linke Schindel zählen. Betrachten wir wieder ihren LUP, so kann dessen  $x$ -Koordinate im Bereich von  $0 \dots n - 2$  variieren, seine  $y$ -Koordinate hingegen von  $0 \dots 2n - 1$ . So erhalten wir  $(n - 1) \cdot 2n = 2n^2 - 2n$

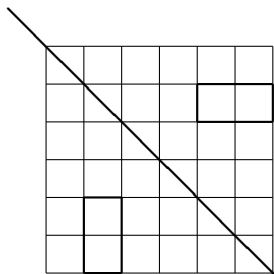
Möglichkeiten.

Im zweiten Fall muss ebenfalls eine der Schindeln ganz links (die andere, durch die linke Wahl festgelegte, ganz rechts) der Symmetrieachse liegen, wiederum zählen wir die möglichen LUP der linken Schindel. Dessen  $x$ -Koordinate kann von  $0 \dots n - 1$  variieren und die  $y$ -Koordinate von  $0 \dots 2n - 2$ , das ergibt  $n(2n - 1) = 2n^2 - n$  Möglichkeiten.

Im dritten Fall parametrisieren wir die möglichen Lagen der beiden Schindeln mit den Abständen vom unteren Rand bis zur unteren Schindel, dem (vertikalen) Abstand der beiden Schindeln voneinander sowie dem Abstand der oberen Schindel zum oberen Rand. Diese drei Zahlen ergeben addiert  $2n - 2$  und stellen eine geordnete Partition von  $2n - 2$  mit drei Summanden dar, es gibt also für sie und damit auch für die Schindeln  $\binom{2n-2+3-1}{3-1} = \binom{2n}{2} = \frac{2n(2n-1)}{2} = n(2n-1) = 2n^2 - n$  Möglichkeiten.

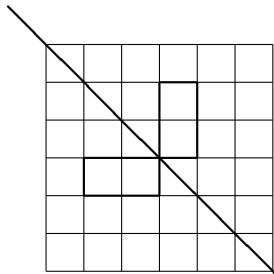
Aus diesen drei Zahlen ergibt sich per Addition der Gesamtwert.

**d2) Lösung:**  $4n^2 - 6n + 2$



1. Fall:

$$2n^2 - 3n + 1$$



2. Fall:

$$2n^2 - 3n + 1$$

**Herleitung:**

Da es hier aufgrund der Form der Schindeln keine Schindeln gibt, die fest bleiben, muss es sich bei der Platzierung, die unter  $s_{Hd}$  fest bleibt, um ein Urbild-Bild-Paar handeln. Um Durchdringungen zu vermeiden, muss sich eine der beiden Schindeln ganz unterhalb der Symmetrieachse befinden, die andere liegt dadurch eindeutig fest und befindet sich ganz oberhalb der Symmetrieachse (Berührung ist jeweils erlaubt). Steht die untere Schindel, liegt die obere und vice versa, damit sich auch schon die noch möglichen Fälle geklärt: Die untere Schindel steht oder sie liegt.

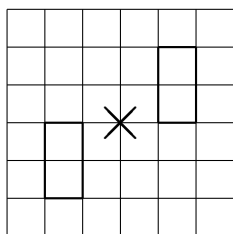
Betrachten wir zuerst, dass sie steht. Für die  $x$ -Koordinate 0 kann ihre  $y$ -Koordinate dann von  $0 \dots 2n - 3$  variieren, das sind  $2n - 2$  Möglichkeiten. Für die  $x$ -Koordinate 1 kann die  $y$ -Koordinate nur noch von  $0 \dots 2n - 4$  rangieren, das ergibt  $2n - 3$  Möglichkeiten, und so weiter. Wir haben also insgesamt

$$(2n - 2) + (2n - 3) + \dots + 2 + 1 = \frac{(2n - 2)(2n - 1)}{2} = (n - 1)(2n - 1) = 2n^2 - 3n + 1$$

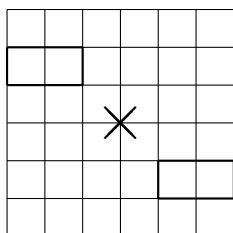
Möglichkeiten.

Da jede Platzierung aus dem 2. Fall per Symmetrie (Spiegelung an der Nebendiagonalen) in eine aus dem 1. Fall übergeht uns umgekehrt, gibt es im 2. Fall die gleiche Anzahl und in der Summe ergibt sich das Endergebnis.

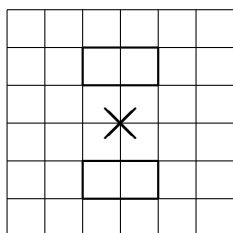
d3) Lösung:  $4n - 2n$



1. Fall:  $2n^2 - n$



2. Fall:  $2n^2 - 2n$



3. Fall:  $n$

**Herleitung:**

Um bei der Punktspiegelung fest zu bleiben, müsste eine Schindel den Mittelpunkt des Quadrats  $(n|n)$  als Mittelpunkt haben, das ist aber unmöglich, weil dann die Eckpunkte der Schindel nicht alle ganz sein können. Also gibt es nur Urbild-Bild-Paare. Im Falle einer stehenden Schindel (1. Fall) muss dann eine der beiden Schindeln ganz links vom Spiegelzentrum sein (Berührung wie immer erlaubt), die andere, die dann festliegt, befindet sich automatisch ganz rechts davon. Wir brauchen also nur die möglichen Schindeln links des Spiegelzentrums zählen. Wir betrachten wie gehabt deren LUP. Seine  $x$ -Koordinate kann von  $0 \dots n - 1$  variieren, seine  $y$ -Koordinate von  $0 \dots 2n - 2$ , das ergibt  $n \cdot (2n - 1) = 2n^2 - n$  Möglichkeiten.

Bei liegenden Schindeln gibt es die gleiche Links-Rechts-Situation (2. Fall), bei der die  $x$ -Koordinate des LUP von  $0 \dots n - 2$  und die  $y$ -Koordinate von  $0 \dots 2n - 1$  variieren kann, ergibt  $(n - 1) \cdot 2n = 2n^2 - 2n$  Möglichkeiten.

Allerdings ist bei liegenden Schindeln auch möglich, dass beide hälftig über/unter dem Spiegelzentrum liegen (3. Fall), die untere der beiden Schindeln legt dann das Ensemble eindeutig fest, und deren  $x$ -Koordinate muss  $n - 1$  sein, die  $y$ -Koordinate kann von  $0 \dots n - 1$  variieren, liefert  $n$  Möglichkeiten.

In der Summe ergibt sich dann  $4n^2 - 2n$ .

d4) Lösung: 0

**Herleitung:**

Offensichtlich kann keine Schindel bei der  $90^\circ$ -Drehung festbleiben, denn hier findet ein Wechsel

von liegend zu stehend und vice versa statt. Also bleibt nur ein Urbild-Bild-Paar. Wendet man aber die  $90^\circ$ -Drehung nochmals an, müssten beide Schindeln stabilisiert werden. Dann hätte aber die  $180^\circ$ -Drehung Schindeln, die sie stabilisiert, im Widerspruch zum oben Gesagten. Also kann es eine solche Platzierung nicht geben.

## Aufgabe 6

a) a1) **Lösung:** 24

**Herleitung:**

In  $x$ -Richtung lässt sich an jeder Stelle wegen der geringen Höhe stets nur ein Quadrat platzieren. Wie viele Möglichkeiten gibt es dafür? Wir parametrisieren die Situation in  $x$ -Richtung wie gehabt via der Abstände, die dann eine geordnete Partition der Zahl 2 mit drei Summanden darstellen, das gibt  $\binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$  Möglichkeiten in  $x$ -Richtung.

Haben wir eine Platzierung in  $x$ -Richtung gewählt, können wir für jedes der beiden Quadrate frei entscheiden, ob wir es an den oberen oder den unteren Rand setzen wollen, für jedes 2 Möglichkeiten, ergibt  $6 \cdot 2 \cdot 2 = 24$  Möglichkeiten.

a2) **Lösung:** 8

**Herleitung:**

Die Symmetriegruppe des Rechtecks hat die Elemente  $s_V$ ;  $s_H$ ;  $d_{180^\circ}$ ;  $id$ .

Von  $s_H$  wird keine Platzierung stabilisiert, also auch von der ganzen Gruppe nicht. Von  $s_V$  werden genau die Platzierungen stabilisiert, die in  $x$ -Richtung symmetrisch und in  $y$ -Richtung gleich sind, davon gibt es 4 Stück. Von  $d_{180^\circ}$  werden genau die Platzierungen stabilisiert, die in  $x$ -Richtung symmetrisch und in  $y$ -Richtung gegensätzlich sind, davon gibt es ebenfalls 4 Stück.

Die restlichen 16 Platzierungen werden nur von  $id$  stabilisiert. Von diesen sind also jeweils 4 geometrisch gleich, von den ersten  $4 + 4 = 8$  Elementen sind nur jeweils 2 geometrisch gleich. Also gibt es  $16 : 4 + 4 : 2 + 4 : 2 = 4 + 2 + 2 = 8$  geometrisch verschiedene Platzierungen.

Selbstverständlich lässt sich das auch ad hoc herausfinden.

b) b1) **Lösung:**  $2^n$

**Herleitung:**

In  $x$ -Richtung gibt es hier nur eine Möglichkeit; man muss 'dicht an dicht' von links nach rechts auffüllen. Man kann aber für jedes der  $n$  Quadrate wählen, ob es am oberen oder am unteren Rand sein soll. Daraus ergeben sich sofort  $2^n$  Möglichkeiten.

b2) **Lösung:**  $2^{n-2} + 2^{\frac{n}{2}-1}$

**Herleitung:**

Wiederum ist es nicht möglich, dass eine Platzierung von  $s_H$  stabilisiert wird. Wenn eine Platzierung von  $s_V$  stabilisiert werden soll, müssen bei ihr rechts von der Symmetrieachse die gleichen Entscheidungen bezüglich oben/unten getroffen worden sein wie links (von der Achse aus betrachtet), die linke Hälfte aber ist völlig beliebig, sodass es dafür  $2^{\frac{n}{2}}$  Möglichkeiten gibt.

Wenn eine Platzierung dagegen von  $d_{180^\circ}$  stabilisiert werden soll, muss — von der Mitte aus gelesen — die Oben/unten-Verteilung rechts der Mitte genau anders herum sein als links von der Mitte. Wieder gibt es dafür  $2^{\frac{n}{2}}$  Möglichkeiten.

Von diesen beiden Platzierungsarten sind jeweils genau 2 Platzierungen geometrisch gleich, von den restlichen 4. Es ergeben sich also

$$2^{\frac{n}{2}} : 2 + 2^{\frac{n}{2}} : 2 + (2^n - 2 \cdot 2^{\frac{n}{2}}) : 4 = 2^{\frac{n}{2}-1} + 2^{\frac{n}{2}-1} + 2^{n-2} - 2^{\frac{n}{2}-1} = 2^{n-2} + 2^{\frac{n}{2}-1}$$

b3) **Lösung:**  $2^{n-2} + 2^{\frac{n-3}{2}}$

**Herleitung:**

Es gibt aus den bekannten Gründen wieder keine Platzierungen, die eine Symmetrie zu  $s_H$  zulassen. Aber auch zu  $d_{180^\circ}$  gibt es diesmal keine symmetrischen Platzierungen. Das liegt daran, dass das Quadrat in der Mitte den Symmetriepunkt im Inneren hat und damit automatisch für es oben/unten vertauscht wird.

Wir müssen also nur noch fragen, wie viele Platzierungen von  $s_V$  stabilisiert werden. Wieder

muss bei den Quadraten, die ganz rechts von der Symmetrieachse liegen, die oben/unten-Entscheidung gleich getroffen werden wie links von der Symmetrieachse. Es gibt  $\frac{n-1}{2}$  solcher Quadrate. Das Quadrat, das über der Achse liegt, wird aber in jedem Fall fest gelassen, es kommt also zu den Freiheitsgraden hinzu. Somit haben wir  $2^{\frac{n+1}{2}}$  von  $s_V$  stabilisierte Platzierungen.

Damit ergeben sich insgesamt

$$2^{\frac{n+1}{2}} : 2 + (2^n - 2^{\frac{n+1}{2}}) : 4 = 2^{\frac{n-1}{2}} + 2^{n-2} - 2^{\frac{n-3}{2}} = 2^{n-2} + 2^{\frac{n-3}{2}}$$

geometrisch verschiedene Platzierungen.

c) **Lösung:**  $32 \cdot \binom{n-5}{5}$

**Herleitung:**

Für die Platzierung in  $x$ -Richtung betrachten wir wieder die 6 Abstände von Rand zu Quadrat zu Quadrat zu Quadrat zu Quadrat zu Quadrat zu Rand, die eine geordnete Partition von  $n-10$  mit 6 Summanden sind, von ihnen gibt es also  $\binom{n-10+6-1}{6-1} = \binom{n-5}{5}$  Stück.

Und wir können für 5 Quadrate die oben/untten-Entscheidung treffen, gibt 32 Möglichkeiten, zusammen  $32 \cdot \binom{n-5}{5}$  Möglichkeiten.

## Aufgabe 7

a) **Lösung:** 1

**Herleitung:**

Die einzige Ziffernkombination, die als Quersumme 1 ergibt, ist  $1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0$ , und bei der zu erstellenden 6-stelligen Zahl muss die 1 vorn stehen.

b) **Lösung:** 6

**Herleitung:**

Diesmal gibt es zwei mögliche Ziffernkonstellationen, die wir im Fortgang — trotz der Nullen — Partitionen nennen werden —, nämlich  $2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0$  und  $1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0$ .

Für die erste Partition gibt es wie bei **a)** eine Möglichkeit. Bei der zweiten *müssen* wir eine der beiden 1en nach vorne stellen, für die zweite haben wir dann 5 mögliche freie Plätze. Zusammen ergibt das 6 Möglichkeiten.

c) **Lösung:** 21

**Herleitung:**

Die möglichen Partitionen sind  $3 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0$ ,  $2 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0$ ,  $1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0$ .

Die erste liefert nur eine Möglichkeit. Im zweiten Fall kann man die 1 oder die 2 für die erste Position wählen, was schon mal 2 Möglichkeiten sind. Die verbleibende Nicht-0 hat dann 5 mögliche Positionen, macht insgesamt  $2 \cdot 5 = 10$  Möglichkeiten. Im dritten Fall muss wieder eine der 1en nach vorn, die beiden anderen können dann beliebig auf 2 von 5 Plätzen verteilt werden, das entspricht  $\binom{5}{2} = 10$  Möglichkeiten.

Insgesamt haben wir also 21 solcher Zahlen.

d) **Lösung:** 56

**Herleitung:**

Die Partitionen sind  $4 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0$  (I),  $3 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0$  (II),  $2 + 2 + 0 + 0 + 0 + 0$  (III),  $2 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0$  (IV) und  $1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0$  (V).

Partition (I) liefert 1 Möglichkeit, Partition (II) liefert 10 Möglichkeiten (analog zum 3, Fall bei **c)**), (III) liefert 5 Möglichkeiten (analog zum 2. Fall bei **b)**), (IV) hat zwei prinzipielle Möglichkeiten: Stellt man die 2 nach vorn, kann man noch die beiden 1en frei auf 2 aus 5 Plätzen verteilen, 10 Möglichkeiten; stellt man hingegen eine 1 nach vorn, hat man für die andere 1 5 freie Plätze und für die 2 dann noch 4 (man beachte, dass die 1 und die 2 verschieden sind!), also 20 Möglichkeiten; zusammen ergibt das 30. Bei (V) muss wieder eine 1 nach vorn, die restlichen 3 können dann frei drei Plätze von 5 besetzen, liefert  $\binom{5}{3} = 10$  Möglichkeiten.

Wir summieren und erhalten 56.

e) **Lösung:** 126

**Herleitung:**

Die Partitionen sind:  $5 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0$  (I),  $4 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0$  (II),  $3 + 2 + 0 + 0 + 0 + 0$  (III),  $3 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0$  (IV),  $2 + 2 + 1 + 0 + 0 + 0$  (V),  $2 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0$  (VI) und  $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 0$  (VII).

(I) liefert 1 Möglichkeit, (II) und (III) liefern je 10 Möglichkeiten (siehe 2. Fall **c)**); (IV) und (V) liefern jeweils 30 Möglichkeiten (siehe **d)** (IV)), bei (VI) gibt es wieder die Möglichkeit, die 2 nach vorn zu stellen und dann die 3 1en frei auf fünf Plätze zu verteilen, was 10 Möglichkeiten bietet, stellt man hingegen eine 1 nach vorn, haben wir für die 2 5 Möglichkeiten und danach immer noch 2 1en frei auf 4 Plätze zu verteilen ( $\binom{4}{2} = 6$  Möglichkeiten), also haben wir, wenn eine 1 vorn steht,  $5 \cdot 6 = 30$  Möglichkeiten, und bei (VII) damit insgesamt 40 Möglichkeiten. Bei (VII) haben wir 5 Plätze für die 0, und das war's.

Zusammen haben wir 126 solcher Zahlen.

f) **Lösung:** 252

**Herleitung:**

Das sind die Partitionen — man kommt übrigens am einfachsten auf sie, wenn man  $54 - 5 = 49$  erkennt und von der möglichen Maximalpartition aus lauter 9en eine für 5 subtrahiert und dann wieder richtig anordnet —:  $9 + 9 + 9 + 9 + 9 + 4$  (I),  $9 + 9 + 9 + 9 + 8 + 5$  (II),  $9 + 9 + 9 + 9 + 7 + 6$  (III),  $9 + 9 + 9 + 8 + 8 + 6$  (IV),  $9 + 9 + 9 + 8 + 7 + 7$  (V),  $9 + 9 + 8 + 8 + 8 + 7$  (VI) und  $9 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8$  (VII). Die jeweiligen Anzahlen sind aber nicht analog zu denen in **e**), weil es hier keine Ziffern mehr gibt, die man nicht an die erste Stelle setzen darf. Deshalb gibt es für (I) 6 Möglichkeiten, für (II) 30 (6 Plätze für die 5 und dann noch 5 für die 8), für (III) analog zu (II) 30, für (IV) 60 (6 Plätze für die 6, dann  $\binom{5}{2} = 10$  Plätze für die beiden 8en), für (V) ebenfalls 60 (analog zu (IV)), für (VI) ebenfalls 60 (6 Plätze für die 7 und dann  $\binom{5}{3} = 10$  Plätze für die 3 8en) und bei (VII) wieder 6 Plätze für die 9. Zusammen macht das 252 Möglichkeiten.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Dass das das Doppelte im Vergleich zu dem Resultat bei Quersumme 5 ist, scheint reiner Zufall zu sein, in anderen Fällen ist kein solcher Zusammenhang zwischen  $n$  und  $54 - n$  zu sehen.

## Aufgabe 8:

a) Lösung:  $\frac{1}{3}$

**Herleitung:**

Die kombinatorische Lösung geht so: Zunächst gibt es vor dem Tausch nur 216 verschiedene Sitzanordnungen. Z.B. stehen für das erste Mitglied von Team Blau 3 Plätze, für das zweite noch 2 Plätze und für das dritte liegt sein Platz dann fest. Macht 6 Möglichkeiten für Team Blau, sich zu setzen. Das gilt unabhängig für jedes Team, also gibt es insgesamt 216 Möglichkeiten.

Irgendein Platz muss die Mitte des Champion/esse-Trios sein. Dafür gibt es 9 Möglichkeiten. Die beiden Plätze um diesen herum liegen dann fest, ebenso wer auf dem ausgezeichneten Platz sitzt. Die restlichen beiden Teammitglieder haben dann pro Team noch 2 Möglichkeiten, macht insgesamt  $9 \cdot 2^3 = 72$  Möglichkeiten.

Nach der bekannten Formel: 'Anzahl der günstigen Möglichkeiten durch Anzahl aller Möglichkeiten' erhalten wir  $P = \frac{72}{216} = \frac{1}{3}$ .

Eine etwas wahrscheinlichkeitstheoretischere Herleitung geht so: Nehmen wir an, der/die blaue Champion/ess wäre Mittelpunkt des Trios, egal, wo er/sie sitzt. Dann ist die WK, dass auf dem roten Platz daneben der/die rote Champion/ess sitzt,  $\frac{1}{3}$ , genauso wie für den grünen Platz daneben, macht  $\frac{1}{9}$ . Jeder der drei Champions könnte Mittelpunkt sein, also  $3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$

b) Lösung:  $\frac{1}{1680}$

**Herleitung:**

Eine beliebige Umsetzung ergibt, es sind ja alles verschiedene Menschen, 9! verschiedene Möglichkeiten, wie sie zu sitzen kommen können.

Wie viele davon sind günstig? Wenn jeder wieder auf einen Platz seiner Farbe muss, nur die 216 aus a). Folglich ist die Wahrscheinlichkeit  $P = \frac{216}{362880} = \frac{1}{1680}$

c) Lösung:  $\frac{1}{840}$

**Herleitung:** Wenn Team Blau auf die roten Plätze kommt, muss Team Rot auf die grünen Plätze kommen (sonst bliebe Team Grün fix) und Team Grün auf die blauen; wenn Team Blau auf die grünen Plätze kommt, muss Team Grün auf die roten Plätze kommen (sonst bliebe Team Rot fix) und Team Rot auf die blauen. Sowie die Farben für die Teams festliegen, gibt es wie oben 216 Möglichkeiten, hier zusammen also 432, und wir erhalten  $P = \frac{432}{362880} = \frac{1}{840}$ .

d) d1) Lösung:  $\frac{1}{40320}$

**Herleitung:**

Alle 9 Buchstaben in 'Trampolin' kommen genau einmal vor. Wenn wir also den Platz für den/die Träger/in des 'T' wählen, wofür wir 9 Möglichkeiten haben, liegen alle anderen Plätze notwendig fest. Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit  $P = \frac{9}{9!} = \frac{1}{40320}$ .

d2) Lösung:  $\frac{1}{10080}$

**Herleitung:**

Nehmen wir kurz an, die beiden 'E' und 'R' wären nummeriert und nur in der richtigen Reihenfolge gültig. Dann gäbe es wie bei **d1)** nur 9 günstige Platzierungen. Nun ist das aber nicht so, d.h. wir können die beiden 'E' austauschen (oder auch nicht), ebenso die beiden 'R', sodass wir jetzt  $9 \cdot 2 \cdot 2 = 36$  günstige Möglichkeiten haben. Somit ergibt sich  $P = \frac{36}{9!} = \frac{1}{10080}$ .

d3) Lösung:  $\frac{1}{1680}$

**Herleitung:**

Bei 'KATAMARAN' kann man die 4 'A' beliebig austauschen, dafür gibt es  $4! = 24$  Möglichkeiten. Also haben wir insgesamt  $9 \cdot 24 = 216$  günstige Möglichkeiten. Ergibt  $P = \frac{216}{9!} = \frac{1}{1680}$ .