Aufgaben zum Tag der Kombinatorik 2025

Aufgabe 1: ([1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1]+6 Punkte)

Tragen Sie die gefragte Zahl an der richtigen Stelle in das Lösungsformular ein:

a) **a1)** Wie viele physisch verschiedene Möglichkeiten gibt es, ein 3×3-Quadrat in einem 11×11-Quadrat zu platzieren?

a2) Wie viele physisch verschiedene Möglichkeiten gibt es, zwei 2×2-Quadrate in einem 10×10-Quadrat zu platzieren?

a3) Wie viele physisch verschiedene Möglichkeiten gibt es, zwei 3×3-Quadrate in einem 10×10-Quadrat zu platzieren?

a4) Wie viele physisch verschiedene Möglichkeiten gibt es, drei 2×2-Quadrate in einem 12×12-Quadrat zu platzieren?

a5) Wie viele geometrisch verschiedene Möglichkeiten gibt es, ein 2×2-Quadrat in einem 10×10-Quadrat zu platzieren?

a6) Wie viele geometrisch verschiedene Möglichkeiten gibt es, ein 5×5-Quadrat in einem 10×10-Quadrat zu platzieren?

a7) Wie viele geometrisch verschiedene Möglichkeiten gibt es, ein 2×2-Quadrat in einem 11×11-Quadrat zu platzieren?

a8) Wie viele geometrisch verschiedene Möglichkeiten gibt es, ein 5×5-Quadrat in einem 11×11-Quadrat zu platzieren?

a9) Wie viele geometrisch verschiedene Möglichkeiten gibt es, zwei 2×2-Quadrate in einem 7×7-Quadrat zu platzieren?

a10) Wie viele geometrisch verschiedene Möglichkeiten gibt es, zwei 3×3-Quadrate in einem 7×7-Quadrat zu platzieren?

a11) Wie viele geometrisch verschiedene Möglichkeiten gibt es, zwei 2×2-Quadrate in einem 8×8-Quadrat zu platzieren?

a12) Wie viele geometrisch verschiedene Möglichkeiten gibt es, zwei 3×3-Quadrate in einem 8×8-Quadrat zu platzieren?

b) Wie viele Zahlenquadrupel (z_1, z_2, z_3, z_4) mit den folgenden Eigenschaften gibt es?

(i) $1 \leq z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4 \leq 10$

(ii) $|z_1 - z_3| \geq 2$ oder $|z_2 - z_4| \geq 2$

Aufgabe 2: (14+6+4 Punkte)

a) Zeichnen Sie in die auf dem Formular bereitgehaltenen Quadrate jeweils einen Repräsentanten der geometrisch verschiedenen Platzierungen von zwei 2×2-Quadraten ein. Wählen sie den (oder einen der) Repräsentanten, für den die Summe der Koordinaten der LUP *minimal* ist. (Wenn Sie einen anderen Repräsentanten wählen, kann es sein, dass er bei der Korrektur nicht als richtig erkannt wird!)
Hinweis: Wie immer haben wir Ihnen mehr Quadrate zur Verfügung gestellt als Sie wirklich brauchen werden.

b) Tragen Sie nun auf die linken Pünktchen unter jedem Quadrat ein, wie viele (physisch verschiedene) Platzierungen mit diesem *geometrisch gleich* sind. (Der Repräsentant zählt mit!)

c) Nehmen wir nun an, wir dürften (und müssten!) die beiden 2×2-Quadrate blau oder rot einfärben, und zwar jeweils eines blau und eines rot.
Machen Sie nun auf den rechten Pünktchen unter jedem Quadrat ein Kreuz, wenn es bei diesem Quadrat zwei geometrisch verschiedene Einfärbungen gibt.
Hinweis: Reines Raten bringt hier nichts, hier erhält man nur Punkte, wenn die Ankreuzungen großteils korrekt sind!

Aufgabe 3: (1,5+2,5+3+4+4 Punkte)

a) Wie viele geordnete Partitionen mit vier Summanden und der Summe 12 gibt es?

b) Wie viele geordnete Partitionen mit vier *geraden* Summanden und der Summe 12 gibt es?

c) Wie viele geordnete Partitionen mit vier *ungeraden* Summanden und der Summe 12 gibt es?

d) Wie viele geordnete Partitionen mit *höchstens drei* Summanden, bei denen keine Null auftreten darf, und der Summe 10 gibt es?

e) Disclaimer: Die nachfolgende Aufgabe ist frei erfunden. Ähnlichkeiten zu tatsächlichen Begebenheiten sind selbstverständlich nicht beabsichtigt, aber leider vielleicht unvermeidlich.
Die Länder Gierland, Schwarzgierland und Nord Giera haben gemeinsam (mit unterschiedlichen Rollen) unter dem heimlichen Applaus anderer ebenfalls äußerst sympathischer Länder (bzw. von äußerst sympathischen Herrschern geführter Länder) ein Land überfallen, dessen Fläche, ungefähr 600000 km^2, sie nach dem Krieg untereinander aufzuteilen gedenken. Um sich nicht mit Kinkerlitzchen aufhalten zu müssen, haben sie das überfallene Land in Tranchen zu je 10000 km^2 aufgeteilt. Den Namen der drei Ländern folgend, gehen wir davon aus, dass es ihnen nicht um spezifische Tranchen geht, sondern nur um die zu ergatternde Fläche. (Zu welchem Zweck auch immer...) Wie viele mögliche Aufteilungen gibt es *theoretisch*, wobei eines oder zwei der Länder auch leer ausgehen können?

Aufgabe 4: (4+8+3+10 Punkte)

a) Wie viele physisch verschiedene Möglichkeiten, zwei 2×2-Quadrate in einem 4×5-Rechteck zu platzieren, gibt es?

b) Wie viele geometrisch verschiedene Möglichkeiten, zwei 2×2-Quadrate in einem 4×5-Rechteck zu platzieren gibt es?
Zeichnen Sie je einen Repräsentanten in die dafür vorgesehenen Rechtecke auf dem Lösungsformular. (Wieder haben wir mehr Rechtecke zur Verfügung gestellt als Sie wirklich brauchen)! Hinweis: Achten Sie darauf, dass das Rechteck nur 4 Symmetrieabbildungen besitzt.

c) Geben Sie eine Formel dafür an, wie viele physisch verschiedene Möglichkeiten es gibt, ein 2×2-Quadrat in einem $n \times n + 1$-Rechteck zu platzieren.

d) Geben Sie eine Formel dafür an, wie viele physisch verschiedene Möglichkeiten es gibt, zwei 2×2-Quadrate in einem $n \times n+1$-Rechteck zu platzieren.
Anleitung: Teilen Sie ihr Resultat zunächst in die drei Fälle 'Keines der kleinen Quadrate berührt den oberen Rand', 'Genau eines der beiden kleinen Quadrate berührt den oberen Rand' und 'Beide kleinen Quadrate berühren den oberen Rand' auf und geben Sie jeweils an, wie viele Möglichkeiten es dafür gibt und leiten Sie davon das Endresultat ab.

Aufgabe 5: (2+4+6+[10+7+10+1] Punkte)

Als 'Schindel' bezeichnen wir ein Rechteck der Größe 1×2 bzw. 2×1.

a) Wie viele physisch verschiedene Möglichkeiten gibt es, eine Schindel in einem 4×4-Quadrat zu platzieren?

b) Wie viele geometrisch verschiedene Möglichkeiten gibt es, eine Schindel in einem 4×4-Quadrat zu platzieren?

c) Wie viele physisch verschiedene Möglichkeiten gibt es, zwei Schindeln in einem 4×4-Quadrat zu platzieren?

d) In diesen Teilaufgaben werden zwei Schindeln in einem $2n \times 2n$-Quadrat platziert.

d1) Wie viele physisch verschiedene solche Platzierungen werden von s_V stabilisiert?
Hinweis: Es gibt hier drei geometrisch grundsätzlich (z. T. ziemlich) verschiedene Fälle. Zeichnen Sie in die Quadrate jeweils ein Beispiel ein. (Es wird hier kein Wert auf Exaktheit, sondern nur auf Erkennbarkeit gelegt)
Geben Sie dann auf den Pünktchen unter dem Quadrat die Anzahl (als so weit wie möglich vereinfachte Formel) an.

d2) Wie viele physisch verschiedene solche Platzierungen werden von S_{Hd} stabilisiert?
Hinweis: Es gibt hier zwei geometrisch grundsätzlich verschiedene Fälle. Zeichnen Sie in die Quadrate jeweils ein Beispiel ein. (Es wird hier kein Wert auf Exaktheit, sondern nur auf Erkennbarkeit gelegt)
Geben Sie dann auf den Pünktchen unter dem Quadrat die Anzahl (als so weit wie möglich vereinfachte Formel) an.

d3) Wie viele physisch verschiedene solche Platzierungen werden von d_{180^o} stabilisiert?
Hinweis: Es gibt hier drei geometrisch grundsätzlich (z. T. ziemlich) verschiedene Fälle. Zeichnen Sie in die Quadrate jeweils ein Beispiel ein. (Es wird hier kein Wert auf Exaktheit, sondern nur auf Erkennbarkeit gelegt)
Geben Sie dann auf den Pünktchen unter dem Quadrat die Anzahl (als so weit wie möglich vereinfachte Formel) an.

d4) Wie viele physisch verschiedene solche Platzierungen werden von d_{90^o} stabilisiert?
Geben Sie auf den Pünktchen die Anzahl (als so weit wie möglich vereinfachte Formel) an.

Aufgabe 6: ([3+4]+[2+4+4]+4 Punkte)

a) In einem Rechteck der Maße 6×3 werden zwei 2×2-Quadrate platziert.

a1) Wie viele physisch verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür?

a2) Wie viele geometrisch verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür?

b) In einem Rechteck der Maße $2n \times 3$ werden werden n 2×2-Quadrate platziert.

b1) Wie viele physisch verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür?

b2) Wie viele geometrisch verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür, wenn n gerade ist?

b3) Wie viele geometrisch verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür, wenn n ungerade ist?

c) Es sei $n \geq 10$. In ein $n \times 3$-Rechteck sollen fünf 2×2-Quadrate platziert werden.
Wie viele physisch verschiedene Möglichkeiten gibt es dafür?

Aufgabe 7: (0,5+1,5+2,5+3,5+4,5+4,5 Punkte)

Wie viele 6-stellige natürliche Zahlen gibt es

a) mit Quersumme 1;

b) mit Quersumme 2;

c) mit Quersumme 3;

d) mit Quersumme 4;

e) mit Quersumme 5;

f) mit Quersumme 49?

Hinweis: Die 6-stelligen natürlichen Zahlen gehen von 100000 bis 999999 (je einschließlich).

Aufgabe 8: (3+3+3+[2+2+2] Punkte)

Nach einem Sportmeeting dreier Teams, die hier der Einfachheit Team Blau, Team Rot und Team Grün heißen sollen, wird für neun ausgewählte SportlerInnen ein Dinner gegeben, zu dem jeweils die drei Bestplatzierten jedes Teams geladen werden, sodass von jeder 'Farbe' 3 SportlerInnen anwesend sind. Diese werden in 'bunter Reihe' gesetzt, nämlich jeweils Blau-Grün-Rot, ansonsten wird zufällig verteilt.
Irgendwann werden die Plätze im Rahmen eines Spiels völlig willkürlich getauscht.

Hinweis: Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten stets als vollständig gekürzte Brüche an!

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass vor dem Tausch die besten jeden Teams nebeneinander zu sitzen kommen?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Tausch jede Person auf einem für ihre Farbe eingedeckten Platz zu sitzen kommt?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Teams vollständig ausgetauscht werden, z.B. sitzt Team Blau nach dem Tausch auf grünen Plätzen, Team Grün auf roten und so weiter, sodass kein Team auf seinen eigenen Plätzen zu sitzen kommt?

d) Zusätzlich zu der Farbkennung erhalten die TeilnehmerInnen noch T-Shirts in ihren Farben, bei denen auf jedem Shirt ein Großbuchstabe steht, zusammen sagen die Buchstaben etwas über die Sportart aus. Zu Beginn ist die Verteilung so, dass man das Wort im Uhrzeigersinn richtig lesen kann.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das auch nach dem Tausch noch so ist, wenn das Wort

d1) TRAMPOLIN;

d2) SPEERWURF;

d3) KATAMARAN lautet?