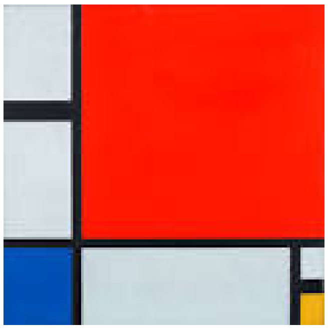
Ein kombinatorisches 2-Quadrat-Problem

Nachstehend ist das Bild 'Komposition mit Rot, Blau und Gelb' aus dem Jahre 1930 des niederländischen Künstlers Piet Mondrian (1872 - 1944). Er gilt als bedeutendster niederländischer Vertreter des sog. *Konstruktivismus*. Künstlerisch oder vielleicht eher kunsthistorisch interessant an Mondrian ist, dass man bei ihm die Entwicklung vom gegenständlichen zum abstrakten Malen sehr gut anhand seiner Werke nachvollziehen kann und er diese Entwicklung auch gut durch Selbstzeugnisse kommentiert hat.



Für den/die Mathematiker/in[1] ist natürlich eher die Art seiner Kompositionen um die Zeit von 1930 interessant, die man in etwas grober Vereinfachung als — zum Teil farbige — Quadrate in einem Rechteck verstehen könnte. Tatsächlich gibt es dazu interessante Probleme, wie etwa die Frage, ob man ein Quadrat komplett mit lauter kleineren Quadraten verschiedener Seitenlänge auffüllen kann — eine Aufgabe, die zu gewisser Zeit als unlösbar galt, bis man dann doch konkrete Lösungen fand.[2]
Der/die Kombinatoriker/in würde selbstverständlich nach der Anzahl der möglichen solchen Bilder — gesetzt den Fall, man würde die KI auf die Nachahmung Mondrians (und bekanntlicherweise ist das alles, was die KI kann: nachahmen) ansetzen: Wie viele verschiedene (völlig wertlose) Bilder könnten dann den Markt überschwemmen? Bei der Freiheit, die sich Mondrian als Künstler mit Fug und Recht gewährt, könnte die Antwort nur lauten: verdammt viele, vielleicht unendlich. Wir wollen deshalb die KI stärker normieren: Sie darf nur ein großes Quadrat als Rahmen verwenden, sie muss eine festgesetzte (winzige) Anzahl von $k \times k$-Quadraten (k fest, ganz und größer als 1) verwenden (und nur die dürfen farbig werden) und muss den Rest mit 1×1 Quadraten auffüllen. Mit anderen Worten:

In diesem Artikel wollen wir die folgende Frage angehen: Wie viele Möglichkeiten gibt es, ein, zwei oder drei $k \times k$-Quadrate in einem $n \times n$-Quadrat so zu platzieren, dass sie sich nicht gegenseitig durchdringen (Berührung ist aber zulässig), parallel zum großen Quadrat sind und ganze Eckkordinaten haben; die letzte Frage werden wir nur noch 'ankratzen' können. Die Frage hat prinzipiell zwei Varianten: Die einfachere besteht darin, zwei Platzierungen dann als verschieden zu betrachten, wenn sie physisch verschieden sind. Die anspruchsvollere Variante besteht darin, zu fragen, wie viele geometrisch verschiedene Platzierungen es gibt, hierbei gelten zwei Möglichkeiten nur dann als verschieden, wenn sie sich nicht durch Symmetrieabbildungen des großen Quadrats ineinander überführen lassen.

Wir werden dabei folgendermaßen vorgehen: Zunächst werden wir die notwendigen theoretischen Voraussetzungen schaffen, denn für die Frage nach den geometrisch verschiedenen Objekten benötigen wir das Bahnenlemma aus der Theorie 'Gruppen operieren auf Mengen'; dann werden wir uns, sozusagen als Übung, den Fall nur eines zu platzierenden Quadrats vornehmen, den Hauptteil wird die ausführliche Behandlung des titelgebenden Falls zweier 'kleiner' Quadrate sein, zum Schluss werden wir uns noch kurz den Fall dreier kleiner Quadrate ansehen, aber nur für physisch verschiedene Fälle; und bereits das wird sich als so kompliziert erweisen, dass wir nicht in der Lage sein werden, mehr als die bloße Formel und die Beweisidee für dieselbe zu liefern, soll dieses Skript nicht zum ersten Mal die 50-Seiten-Grenze überschreiten.

[1] als Mathematiker/in, nicht als Person

[2] So weit der Autor weiß, sind zwar diese Beispiele bekannt, und gelegentlich fördert ein Rechner noch eines zu Tage, aber von einer echten Durchdringung der Fragestellung ist man noch weit entfernt.

1 Eine Handvoll Gruppentheorie

1.1 Der Gruppenbegriff

Definition: Eine Menge G zusammen mit einer Verknüpfung $*$, also $(G,*)$ heißt eine Gruppe, wenn $*$ auf G die folgenden Eigenschaften erfüllt:

(i) $*$ ist eine innere Verknüpfung, d.h. für alle $g_1, g_2 \in G$ muss auch $g_1 * g_2$ ein Element von G sein. Man nennt das auch: Abgeschlossenheit unter $*$.

(ii) Die Verknüpfung $*$ muss assoziativ sein, d.h. für alle $g_1,\ g_2,\ g_3 \in G$ muss gelten:

$$(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3)$$

(iii) G muss ein neutrales Element e (manchmal auch 'eine 1' genannt) besitzen, sodass für alle $g \in G$ gilt:

$$e * g = g * e = g$$

(Dieses neutrale Element ist stets eindeutig, denn gäbe es zwei, so würde gelten: $e_1 = e_1 * e_2 = e_2$)

(iv) Jedes Element $g \in G$ muss ein 'inverses' Element $g^{-1} \in G$ besitzen mit der Eigenschaft:

$$g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$$

Falls $g = g^{-1}$ ist, nennt man g 'selbstinvers'.

Beispiele:

1. $(\mathbf{Z}, +)$ ist eine Gruppe.
   Um das einzusehen, müssen wir die Gültigkeit von (i) bis (iv) einsehen.
   Die Abgeschlossenheit ist erfüllt, da die Addition zweier ganzer Zahlen stets wieder eine ganze Zahl liefert.
   Die Assoziativität ist erfüllt, da für das Addieren von Zahlen das Assoziativgesetz gilt.
   Die Zahl 0 ist das neutrale Element der Addition, denn $z + 0 = 0 + z = z$.
   Zur Zahl z ist die Gegenzahl $-z$ das inverse Element, denn es gilt $z + (-z) = (-z) + z = 0$.

   Da für die Addition ferner auch noch das Kommutativgesetz gilt, ist $(\mathbf{Z}, +)$ sogar eine 'kommutative' oder 'abelsche Gruppe'.
2. $(\mathbf{N}, +)$ ist keine Gruppe, da sie weder ein neutrales noch inverse Elemente besitzt.
3. $(2\mathbf{Z}, +)$ ($2\mathbf{Z}$ ist die Menge der geraden Zahlen) ist eine Gruppe.
   Die Summe zweier gerader Zahlen ist wieder gerade, also ist $+$ auf $2\mathbf{Z}$ abgeschlossen, und eine negative gerade Zahl (Inverses) ist ebenso gerade wie die positive; und die Assoziativität überträgt sich von $\mathbf{Z}$.
4. Hingegen ist die Menge der ungeraden Zahlen mit der Addition keine Gruppe, da das neutrale Element fehlt und die Menge auch nicht abgeschlossen bezüglich $+$ ist, die Summe zweier ungerader Zahlen ist nämlich gerade, nicht wieder ungerade.
5. $(\mathbf{Z}, \cdot)$ ist keine Gruppe, (i) bis (iii) sind zwar erfüllt (das neutrale Element ist die Zahl 1), aber die Inversen fehlen, für $2 \cdot x = x \cdot 2 = 1$ müsste x ein Bruch sein und eben keine ganze Zahl.
6. $(\mathbf{Q} \setminus \{\mathbf{0}\}, \cdot)$ ist eine Gruppe.
   Das Produkt zweier rationaler Zahlen ist wieder rational (i), Multiplizieren erfüllt das Assoziativgesetz (ii), die Zahl 1 ist das neutrale Element (iii) und das inverse Element einer rationalen Zahl ist ihr Kehrbruch (iv).

1.2 Die Symmetriegruppe eines Quadrats

Diese Beispiele dienen lediglich zu einer oberflächlichen Illustration des Konzepts. Für uns wirklich wichtig ist aber der

Satz:

Es sei $\mathcal{S} = \{s_V,\ s_H,\ s_{Hd},\ s_{Nd},\ d_{90^o},\ d_{180^o},\ d_{270^o},\ id\}$.
Dann ist $(\mathcal{S}, \circ)$ eine Gruppe. ($\circ$ ist die normale Hintereinanderausführung von Abbildungen.)

Beweis:

Der heikelste Punkt ist die Abgeschlossenheit, das ist der Punkt, bei dem wir Rekurs auf (ehemaligen) Mittelstufenstoff nehmen werden.
Es ist offensichtlich, dass wir, wenn wir wir zwei Drehungen hintereinander ausführen, wieder eine Drehung erhalten, die Drehwinkel addieren sich dabei. Geraten wir mit der Summe über die Volldrehung hinaus, subtrahieren wir 360^o. Damit ist klar, dass die Hintereinanderausführung von zwei der gegebenen Drehungen wieder eine der Drehungen liefert. Wenn man zwei beliebige Achsenspiegelungen hintereinander ausführt, so gibt es zwei Fälle: Falls die Achsen parallel stehen, erhält man eine Verschiebung senkrecht zu den beiden Achsen in doppelter Länge des Abstands der Achsen — der Fall paralleler Achsen tritt hier aber nicht auf. Falls die Achsen sich schneiden, erhält man eine Drehung um den Schnittpunkt der Achsen, der Drehwinkel ist der doppelte Winkel zwischen den Achsen (in Ausführungsrichtung). Da alle vier Symmetrieachsen zueinander die Winkel 45^o oder 90^o haben (bei Ausführung in der 'falschen' Richtung eben negativ), ergeben sich Drehwinkel von 90^o, 180^o oder 270^o (oder, wenn wir die gleiche Spiegelung nehmen, um 0^o), also genau die Drehungen aus $\mathcal{S}$. Was geschieht aber, wenn wir eine Drehung und eine der Achsenspiegelungen verknüpfen? Dafür wollen wir ein Beispiel geben, alle anderen funktionieren genauso.
Was ergibt also $s_V \circ d_{90^o}$? Dazu verwenden wir, dass wir nach dem Vorigen Folgendes wissen: $d_{90^o} = s_V \circ s_{Hd}$, also

$$s_V \circ d_{90^o} = s_V \circ (s_V \circ s_{Hd}) = (s_V \circ s_V) \circ s_{Hd} = id \circ s_{Hd} = s_{Hd}$$

Damit haben wir gesehen, wie die Verknüpfung einer Spiegelung mit einer Drehung wieder eine Spiegelung liefert.
Also ist $(\mathcal{S}; \circ)$ tatsächlich abgeschlossen.

Die Hintereinanderausführung von beliebigen Abbildungen ist stets assoziativ — wir haben das oben auch schon verwendet.

Das neutrale Element ist selbstverständlich die identische Abbildung.

Alle Spiegelungen — auch die Punktspiegelung — und die Identität sind selbstinvers, denn wenn man ein- und dieselbe Spiegelung zweimal hintereinander ausführt, ergibt sich die identische Abbildung.
Und zu d_{90^o} ist d_{270^o} invers und umgekehrt. ∎

1.3 Untergruppen

Wir kommen nun zu einem wichtigen Konzept, dem der Untergruppen:

Definition:

Es sei $(G, *)$ eine Gruppe und $\emptyset \neq H \subset G$.
Dann heißt H eine Untergruppe von G, falls $(H, *)$ selbst eine Gruppe ist.

Lemma:

Falls $(G, *)$ eine endliche Gruppe ist (d.h. endliche viele Elemente hat), reduziert sich die Überprüfung der Untergruppeneigenschaft auf die Überprüfung der Abgeschlossenheit.

Beweis:

Wenn H bezüglich $*$ nicht abgeschlossen ist, ist $(H, *)$ per definitionem keine Gruppe.

Wenn andererseits H bezüglich $*$ abgeschlossen ist, ist der Punkt (i) erfüllt. Die Assoziativität von $*$ auf H ergibt sich sofort daraus, dass $*$ auf der größeren Menge G assoziativ ist.
Da H ja nun abgeschlossen ist und nichtleer, muss es ein $h \in H$ geben. Wegen der Abgeschlossenheit sind dann auch $h^2 = h * h$, $h^3 = h^2 * h$ und so weiter Elemente von H. Sie sind aber auch Elemente von G. Wir bezeichnen (auch im Folgenden) mit $\#G$ die Anzahl der Elemente von G und betrachten in G die Elemente

$$h, \quad h^2, \quad h^3, \dots, h^{\#G}, \quad h^{\#G+1}$$

Das sind $\#G + 1$ Elemente von G, nach dem Schubfachprinzip können diese nicht alle verschieden sein. Also gibt es zwei verschiedene Exponenten n_1 und n_2 mit

$$h^{n_1} = h^{n_2}$$

O.B.d.A. sei $n_1 > n_2$.
In G, das ja eine Gruppe ist, hat h ein Inverses h^{-1}. Damit multiplizieren wir die obige Gleichung

$$h^{n_1} = h^{n_2} \quad | * h^{-1} \iff h^{n_1} * h^{-1} = h^{n_2} * h^{-1}$$

$$(h^{n_1-1} * h) * h^{-1} = (h^{n_2-1} * h) * h^{-1} \iff h^{n_1-1} * (h * h^{-1}) = h^{n_2-1} * (h * h^{-1}) \iff h^{n_1-1} = h^{n_2-1}$$

Dieses Verfahren wiederholen wir solange, bis sich zuerst $h^{n_1-n_2+1} = h$ und im nächsten Schritt $h^{n_1-n_2} = e$ ergibt. Das linke Element ist aber sicher ein Element von H, also liegt das neutrale Element sicher in H.
Wir wissen nun, dass es ein von 0 verschiedenes n gibt, sodass $h^n = e$ ist und in H liegt. Dann liegt natürlich auch h^{n-1} in H. Für dieses Element gilt aber

$$h * h^{n-1} = h^{n-1} * h = e$$

Also ist h^{n-1} das inverse Element zu h und liegt in H.
Damit ist $(H, *)$ als Gruppe erkannt. ∎

Bemerkung:
Wir wollen kurz explizit festhalten, was wir gerade bewiesen haben:
In einer endlichen Gruppe $(G, *)$ hat jedes Element $g \in G$ endliche Ordnung, d.h. es gibt eine natürliche Zahl n, sodass $g^n = id$ ist, die kleinste solche natürliche Zahl nennt man die Ordnung von g.
Ferner ist das Inverse jeden Elements $g \in G$ eine 'Potenz' von g.
In unendlichen Gruppen sind diese Aussagen in der Regel falsch!

Als sehr nützlich wird sich der folgende Sachverhalt erweisen:

Lemma:
Es sei $(G, *)$ eine endliche Gruppe und H eine Untergruppe von G.
Dann gilt, dass $\#H$ ein Teiler von $\#G$ ist. ($\#X$ bezeichnet die Anzahl der Elemente von X)

Beweis:
Dafür führen wir das Konzept der sogenannten Nebenklassen ein. Wir setzen (zunächst für jedes $g \in G$)

$$gH = \{g * h \mid h \in H\}$$

Als nächstes behaupten wir, dass zwei solcher Nebenklassen entweder identisch oder disjunkt sind.
Betrachten wir dazu zwei Nebenklassen g_1H und g_2H. Wenn diese disjunkt sind, ist die Behauptung erfüllt. Nehmen wir also an, sie sind nicht disjunkt und haben mindestens ein gemeinsames Element. Wir müssen zeigen, dass sie automatisch identisch sind. Für das gemeinsame Element x muss dann gelten:

$$x = g_1h_1 = g_2h_2$$

Daraus ergibt sich

$$g_1 = g_2h_2h_1^{-1} \qquad \text{und} \qquad g_2 = g_1h_1h_2^{-1}$$

Sei $g_1 h$ ein beliebiges Element aus $g_1 H$. Dann gilt

$$g_1 h = g_2 h_2 h_1^{-1} h$$

Und da $h_2 h_1^{-1} h \in H$ ist, ist $g_1 \in g_2 H$. Damit ist $g_1 H \subset g_2 H$.
Völlig analog sieht man $g_2 H \subset g_1 H$ ein, also sind die beiden Restklassen identisch.

Ferner enthält eine Restklasse genau $\#H$ verschiedene Elemente. Denn aus $g * h_1 = g * h_2$ folgt

$$g = g * h_2 * h_1^{-1} \iff e = h_2 * h_1^{-1} \iff h_1 = h_2$$

Und schließlich ist jedes Element $g \in G$ zumindest in gH enthalten, also überdecken die Nebenklassen ganz G. Wenn wir nun der Reihe nach Restklassen wählen, die wir noch nicht haben, und alle identischen streichen, sehen wir, dass man G als die Vereinigung von lauter disjunkten Restklassen, die alle $\#H$ viele Elemente haben, darstellen kann, mithin ist $\#H$ ein Teiler von $\#G$. ∎

1.4 Gruppen operieren auf Mengen; das Bahnenlemma

Zuletzt führen wir das Konzept 'Gruppen operieren auf Mengen' ein und beweisen das Bahnenlemma.

Definition: (i) Wir sagen, eine Gruppe $(G, *)$ operiert auf einer Menge M, falls es für jedes $g \in G$ eine Abbildung $o_g : M \to M$ gibt, die gemeinsam die folgende Regel erfüllen:

$$o_{g_1 * g_2}(m) = o_{g_1}(o_{g_2}(m))$$

und falls für alle $m \in M$ gilt: $o_e(m) = m$. (e steht hier für das neutrale Element in $(G, *)$.)

(ii) Wenn G auf M operiert, nennen wir

$$I_m := \{g \in G \mid o_g(m) = m\}$$

den Stabilisator von m in G.

(iii) Die Menge

$$B(m) := \{o_g(m) \mid g \in G\}$$

heißt die Bahn von m unter G.

Bemerkungen: 1. Der Stabilisator von m besteht also genau aus denjenigen Elementen von G, die das Element m bei der Operation unverändert lassen.

2. Die Bahn von m umfasst alle diejenigen Elemente von M, die man bekommen kann, indem man irgendein Element von G auf m anwendet. (Man sieht an dieser Formulierung, dass man meistens nicht das Konstrukt der Abbildung o_g verwendet, sondern direkt sagt, dass g m abbildet.)

3. Wir werden im Folgenden die beiden (für uns) wichtigsten Eigenschaften dieser Definitionen beweisen:

Lemma:
I_m ist eine Untergruppe von G.

Beweis:
Wir werden den Beweis nur im Falle einer endlichen Gruppe führen, die Aussage gilt aber für alle Gruppen.

Im endlichen Fall müssen wir lediglich die Abgeschlossenheit beweisen. Seien also $g_1,\ g_2 \in I_m$, dann muss auch $g_1 * g_2$ in I_m sein, also m fest lassen (d.h. auf sich selbst abbilden). Das ist aber wegen

$$o_{g_1 * g_2}(m) = o_{g_1}(o_{g_2}(m)) = o_{g_1}(m) = m$$

sicher der Fall. ∎

Lemma: (das Bahnenlemma)

Es operiere G auf M. Dann hat $B(m)$ genau $\dfrac{\#G}{\#I_m}$ Elemente.

Beweis:

Wir betrachten dazu die Nebenklassen gI_m von G und behaupten, dass alle Elemente einer Nebenklasse m gleich abbilden, verschiedene Nebenklassen m aber verschieden abbilden, sodass $B(m)$ genau so viele Elemente hat wie es verschiedene Nebenklassen von I_g in G hat, und das sind nach dem Vorigen genau $\frac{\#G}{\#I_m}$ viele.
Nehmen wir also zwei verschiedene Elemente x_1 und x_2 aus gI_m. Dann lassen sie sich schreiben als

$$x_1 = g * i_1 \qquad\qquad x_2 = g * i_2$$

mit geeigneten $i_1,\ i_2 \in I_g$. Dann gilt aber

$$x_1(m) = g(i_1(m)) = g(m) \qquad\qquad x_2(m) = g(i_2(m)) = g(m)$$

was den ersten Teil unserer Behauptung etabliert.
Nehmen wir andererseits an, wir hätten zwei Nebenklassen g_1I_g und g_2I_g, deren Elemente m gleich abbilden, also muss wegen $e \in I_g$ und der Tatsache, dass alle Elemente einer Nebenklasse m gleich abbilden $g_1(m) = g_2(m)$.
Dann gilt aber auch

$$g_2^{-1}(g_1(m)) = g_2^{-1}(g_2)m \iff (g_2^{-1} * g1)(m) = (g_2^{-1} * g_2)(m) = e(m) = m$$

Folgerichtig gilt $g_2^{-1} * g_1 \in I_g$, d.h.:

$$g_2^{-1} * g_1 = i \iff g_1 = g_2 * i$$

Und daraus folgt $g_1 \in g_2I_g$, also sind die Restklassen nicht disjunkt und nach dem Vorigen identisch. Das etabliert den zweiten Teil unserer Behauptung und damit unser Lemma. ∎

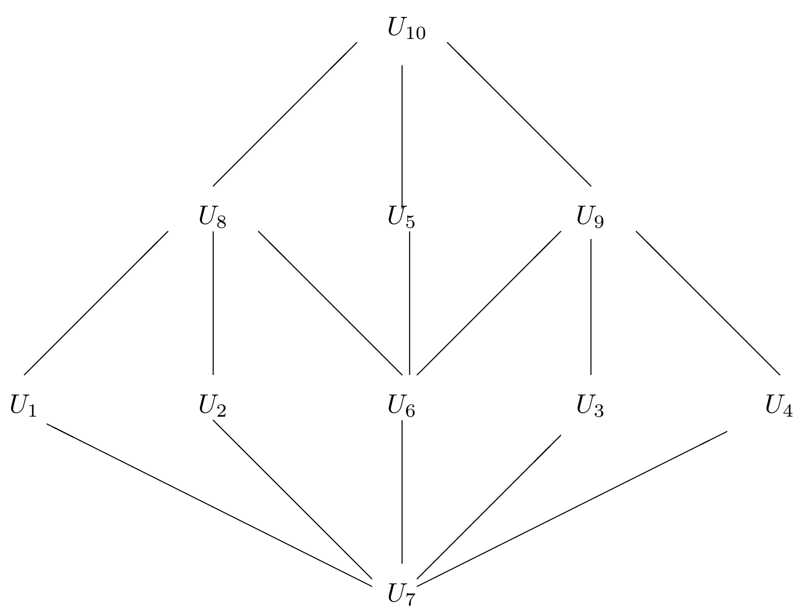
1.5 Die Untergruppenstruktur der Symmetriegruppe des Quadrats

In diesem Unterabschnitt werden wir für eine hilfreiche Anwendung des Bahnenlemmas zunächst alle möglichen Untergruppen der Symmetriegruppe des Quadrats bestimmen, wobei wir theoretisch über die erzeugenden Elemente gehen, ohne dass wir dieses theoretische Konzept hier in vollem Umfang darlegen werden.

Wenn eine Teilmenge eine Untergruppe ist, dann ist sie per definitionem abgeschlossen unter $\circ$, mit einem bestimmten Element muss sie also alle seine Potenzen (bis diese irgendwann einmal id werden) enthalten. Andererseits ist die Menge aller Potenzen eines festen Elements von $\mathcal{S}$ inklusive id auch eine Untergruppe, wie wir oben gesehen haben. Man sagt dann, das Element erzeuge die Untergruppe und nennt sie eine *zyklische* Untergruppe, das ist aber für uns nicht weiter wichtig. Wir betrachten zunächst alle zyklischen Untergruppen von $(\mathcal{S};\circ)$:
$U_1 =< s_V >= \{s_V,\ id\}$ ($< s_V >$ die von s_V erzeugte Gruppe ist die kleinste Untergruppe von $(\mathcal{S},\circ)$, die s_V enthält, und das ist automatisch eine zyklische Gruppe, denn sie muss alle Potenzen von s_V enthalten und mehr braucht sie nicht. Und da schon $s_V^2 = id$ gilt, hat $< s_V >$ eben genau die zwei angegebenen Elemente. Völlig analog ergeben sich:
$U_2 =< s_H >= \{s_H,\ id\}$
$U_3 =< s_Hd >= \{s_{Hd},\ id\}$
$U_4 =< s_Nd >= \{s_{Nd},\ id\}$
$U_5 =< d_{90^o} >= \{d_{90^o},\ d_{180^o},\ d_{270^o},\ id\} =< d_{270^o} >$
$U_6 =< d_{180^o} >= \{d_{180^o},\ id\}$
$U_7 =< id >= \{id\}$
Letztere ist eine der beiden 'trivialen' Untergruppen, die es immer gibt, die andere ist die ganze Gruppe selbst.

Nun müssen wir Untergruppen bestimmen, die von mehr als einem Element erzeugt werden. Dabei stellen wir folgende Erkenntnisse an den Anfang: Enthält eine Untergruppe d_{90^o} oder d_{270^o} und ein weiteres Element, das keine Drehung ist (id ist eine Drehung!), dann ist diese Untergruppe die gesamte Gruppe $(\mathcal{S}, \circ)$. Sie enthält nämlich mit d_{90^o} oder mit d_{270^o} sicher die davon erzeugte zyklische Untergruppe, also vier Elemente, und eben noch ein weiteres Element, also mindestens 5 Elemente. Da ihre Elementezahl aber die von $\mathcal{S}$, also 8 teilen muss, kann sie dann nur 8 sein. Ferner gilt, dass wenn eine Untergruppe zwei Spiegelungen, deren Achsen in einem 45^o-Winkel zueinander stehen, enthält, so ist sie die Gesamtgruppe. Denn aus der Elementargeometrie folgt, dass sie dann die 90^o-Drehung enthält und noch weitere Elemente, also muss sie $\mathcal{S}$ selbst sein.
Damit bleibt uns nicht mehr viel zu untersuchen:
$U_8 =< s_V, s_H >= \{s_V,\ s_H,\ d_{180^0},\ id\} =< s_V,\ d_{180^o} >=< s_H,\ d_{180^o} >$
(Wir haben hierbei verwendet, dass das Erzeugnis, also die kleinste Untergruppe, in die zwei Elemente passen, nicht größer sein kann als eine bekannte Untergruppe, in die sie passen, und da Untergruppen von $(\mathcal{S}, \circ)$ 1, 2, 4 oder 8 Elemente haben müssen, müssen die beiden zuletzt aufgeschriebenen Erzeugnisse gleich dem ersten sein.
$U_9 =< s_{Hd}, s_{Nd} >= \{s_{Hd},\ s_{Nd},\ d_{180^o},\ id\} =< s_{Hd}, d_{180^o} >=< s_{Hd}, d_{180^o} >$
Alle von mehr als einem Element erzeugten Untergruppen — es macht natürlich keinen Sinn, zu einem Element eines hinzuzufügen, das in der von diesem Element erzeugten zyklischen Gruppe enthalten ist, das liefert nichts Neues — hatten 4 Elemente, gibt man noch irgendein fremdes Element hinzu, kommt stets $\mathcal{S}$ heraus, die wir hier aber natürlich noch aufführen müssen:
$U_{10} = \mathcal{S}$.

Wir fassen dieses in einer Grafik zusammen, die den Untergrupppenverband veranschaulicht:



Unsere Idee im Folgenden wird sein, zu fragen, welche Elemente der Menge der mit 1 oder 2 kleinen Quadraten gefüllten großen Quadrate welche der Untergruppen als Stabilisator haben, denn das sagt via dem Bahnenlemma, wie viele von ihnen als gleich zu betrachten sind.

Beginnen wir mit dem relativ einfachen Fall, dass wir nur ein $k \times k$-Quadrat platzieren wollen:

2 Ein $k \times k$-Quadrat

Wir fragen also, wie viele Möglichkeiten es gibt, ein $k \times k$-Quadrat achsparallel und mit ganzen Eckpunkten in ein $n \times n$-Quadrat einzubauen, und wie viele davon als geometrisch verschieden zu betrachten sind.
Die erste Frage ist noch recht simpler Natur und die Antwort darauf ist augenblicklich formulierbar:

Satz:

Es gibt genau $(n-k+1)^2$ Möglichkeiten, ein $k \times k$-Quadrat achsparallel und mit ganzen Eckpunkten in ein $n \times n$-Quadrat zu platzieren.

Beweis:

Wir koordinatisieren das $n \times n$-Quadrat auf beiden Achsen mit $0 \dots n$. Dann kann die x-Koordinate des linken unteren Eckpunkts (durch die Voraussetzung der Achsparallelität macht diese Bezeichnung Sinn) des $k \times k$-Quadrats von $0 \dots n-k$ rangieren, und genauso seine y-Koordinate, was $(n-k+1)^2$ Möglichkeiten für diese Koordinaten ergibt. Und selbstverständlich sitzt das $k \times k$-Quadrat an einer anderen Stelle, wenn wir seinen linken unteren Punkt variieren, andererseits legt dieser aber das kleine Quadrat eindeutig fest. $\blacksquare$

Bemerkung:

Selbstverständlich haben wir oben stillschweigend $k \leq n$ vorausgesetzt, sonst macht die ganze Betrachtung (und die Fragestellung) gar keinen Sinn.

Gehen wir zur deutlich aufwändigeren Fragestellung über: Wie viele geometrisch verschiedene Möglichkeiten gibt es? Hier wird bereits die Formulierung des Satzes anspruchsvoller, da es zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden gibt:

Satz:

Es gibt genau die folgende Anzahl geometrisch verschiedener Platzierungen eines achsparallelen $k \times k$-Quadrats mit ganzen Eckpunktskoordinaten in einem $n \times n$-Quadrat:

n und k haben denselben Zweierrest: $\frac{(n-k+1)^2+4(n-k)+7}{8}$

n und k haben verschiedene Zweierreste: $\frac{(n-k+1)^2+2(n-k+1)}{8}$

Beweis:

Wir werden nun für jede Untergruppe in einer ersten Runde untersuchen, wie viele Elemente von ihr stabilisiert werden. In einer zweiten Runde durch alle Untergruppen werden wir diejenigen Elemente abrechnen, die von einer größeren Untergruppe stabilisiert werden (wobei 'größere' nicht über die Elementzahl definiert ist, sondern über das Enthaltensein), da dann die kleinere ja unmöglich der Stabilisator sein kann, denn der enthält ja *alle* Gruppenelemente, die das Quadrat-Element stabilisieren. Daraus ist ersichtlich, dass die Reihenfolge der betrachteten Untergruppen für die erste Runde nach unserem Gusto gehalten werden kann — wir werden eine wählen, bei der man häufig auf schon Gedachtes zurückgreifen kann —, für die zweite Runde ist aber eine Reihenfolge von oben nach unten in dem oben angegebenen Untergruppenverband unerlässlich.

1. Runde:

Wir fragen also für jede Untergruppe, wie viele Quadrat-Elemente sie stabilisiert, und beginnen mit

U_1: Wenn ein Quadrat-Element von der Spiegelung an der Mittelvertikalen des großen Quadrats stabilisiert werden soll, dann muss das kleine Quadrat bei dieser Spiegelung auf sich selbst gespiegelt werden. Das ist nur dann der Fall, wenn seine Eckkoordinaten in x-Richtung symmetrisch um $x = \frac{n}{2}$ verteilt sind. Falls n gerade ist, ist $\frac{n}{2}$ ganz, also muss auch k gerade sein, sonst haben die Eckpunkte des kleinen Quadrats nicht-ganze Koordinaten. Das gleiche geschieht, wenn n ungerade, also $\frac{n}{2} = a,5$ ist und stattdessen k gerade. Auch dann müsste das kleine Quadrat nicht-ganze Eckkoordinaten aufweisen. Mit anderen Worten: Falls n und k verschiedene Zweierreste haben, kann es solche Quadrat-Elemente gar nicht geben.
Falls nun andererseits k und n den gleichen Zweierrest haben, dann sind die notwendigen (!) x-Koordinaten des kleinen Quadrates ganz und die y-Koordinaten seiner unteren Punkte können von $o \dots n-k$ variieren; es gibt dann also $n-k+1$ Quadrat-Elemente, die von U_1 stabilisiert werden.

U_2: Diese Untergruppe liefert das gleiche Resultat wie U_1, man ersetze in der obigen Herleitung einfach 'vertikal' durch 'horizontal' und x durch y (und vice versa).

U_3: Hier müssen wir fragen, welche kleinen Quadrate von der Spiegelung an der Hauptdiagonalen des großen Quadrats stabilisiert, also als Ganzes fest gelassen werden. Dafür muss ihr Mittelpunkt bei der Spiegelung fest bleiben, sonst entsteht ein anderes Quadrat, also muss der Mittelpunkt des kleinen Quadrats auf der Spiegelachse liegen. Tut er dies, liegen zwei Eckpunkte auch auf der Spiegelachse und haben deshalb ganze Koordinaten, die beiden anderen Eckpunkte haben dann notwendigerweise auch ganze Koordinaten. Somit erfüllt jedes kleine Quadrat, dessen Mittelpunkt auf der Hauptdiagonalen liegt, die Bedingungen dieses Unterpunkts, egal was n und k sind, es ist also nur zu fragen, wie viele es davon gibt.
Legt man nur die x-Koordinate des linken unteren Eckpunkts fest, legt man damit das Quadrat fest; und diese x-Koordinate kann (wieder einmal) von $0 \ldots n-k$ variieren, womit es $n-k+1$ Möglichkeiten gibt.

U_4: Diese Untergruppe liefert mit analogen Überlegungen das gleiche Resultat wie U_3.

U_6: Welche kleinen Quadrate werden von der 180^o-Drehung stabilisiert? Erneut hilft uns die Überlegung mit dem Mittelpunkt des kleinen Quadrats. Bleibt dieser bei der Drehung nicht fest, dann ganz bestimmt auch nicht das Quadrat. Eine Drehung hat aber nur einen Fixpunkt, nämlich den, um den gedreht wird. Somit kann das kleine Quadrat nur fest bleiben, wenn sein Mittelpunkt der Mittelpunkt des großen Quadrats ist. Dieses einzige mögliche kleine Quadrat hat aber nur dann ganze Eckkoordinaten, wenn n und k den gleichen Zweierrest besitzen. (Die Argumentation ist genau gleich wie bei U_1). Somit gibt es, falls n und k denselben Zweierrest haben, 1 solches Quadrat, andernfalls keines.

U_5: Mit den gleichen Argumenten wie bei U_6 sehen wir ein, dass nur ein einziges Quadrat dafür in Frage kommt — das gleiche wie bei U_6 —, von der 90^o-Drehung stabilisiert zu werden (und es wird auch stabilisiert). Folglich ergibt sich das gleiche Resultat wie bei U_6.

$U_{8,9,10}$: Für alle diese Gruppen gilt, dass sie die Drehung um 180^o enthalten, somit kommt nur dasjenige kleine Quadrat in Frage, dessen Mittelpunkt der des großen Quadrats ist, und das nur dann ganzzahlige Eck-Koordinaten hat, wenn n und k den gleichen Zweierrest haben. Andererseits bleibt dieses Quadrat dann auch unter allen Symmetrien des großen Quadrats fest, wird also sowohl von U_8 als auch U_9 und U_{10} stabilisiert, sodass sich jeweils das gleiche Resultat wie bei U_5 ergibt.

U_7: Selbstverständlich stabilisiert die identische Abbildung, das einzige Gruppenelement von U_7, alle Quadrat-Elemente.

2. Runde: Nun fragen wir, wie viele Quadrat-Elemente *genau* von dieser Untergruppe stabilisiert werden, falls ein Quadrat-Element zwar von dieser Untergruppe stabilisiert wird, aber auch noch von einer größeren Untergruppe stabilisiert wird, so ist es auszuscheiden. Wir beginnen deshalb mit

U_{10}: Diese Untergruppe hat keine sie enthaltenden größeren Untergruppen, deshalb bleibt das obige Resultat bestehen: Falls n und k den gleichen Zweierrest haben, gibt es 1 Quadrat-Element, das U_{10} als Stabilisator hat, andernfalls gibt es 0.

$U_{9,8,5}$: Für diese drei Gruppen gilt, dass sie im Falle, dass der Zweierrest von n und k verschieden ist, sowieso kein Quadrat-Element stabilisieren. Aber sie sind immer in U_{10} enthalten. Im Falle, dass n und k den gleichen Zweierrest haben, stabilisieren sie zwar 1 Quadrat-Element, da dieses aber auch von U_{10} stabilisiert wird, gibt es generell keine Quadrat-Elemente, die *genau* von diesen drei Gruppen stabilisiert werden.

U_6: Im Prinzip gilt das Argument des letzten Abschnitts auch für U_6; dass U_6 zusätzlich auch noch in U_5 enthalten ist, ändert gar nichts.

U_4: Es werden jeweils $n-k+1$ Quadrat-Elemente von U_4 stabilisiert. U_4 ist nur in U_{10} enthalten, also muss im Falle, dass n und k verschiedene Zweierreste haben, nichts abgezogen werden, ansonsten das schon sattsam bekannte eine Quadrat-Element. An Quadrat-Elementen, die U_4 als Stabilisator haben, gibt es also $n-k+1$, falls n und k verschiedene Zweierreste haben und $n-k$, falls die Zweierreste gleich sind.

U_3: Hier ergibt sich das gleiche Ergebnis wie bei U_4.

U_2: Falls n und k verschiedene Zweierreste haben, gibt es keine Quadrat-Elemente, die von U_2 stabilisiert werden. Falls n und k den gleichen Zweierrest haben, gibt es $n-k+1$ Quadrat-Elemente, die von U_2 stabilisiert werden; eines davon hat aber U_{10} also Stabilisator, es ist also zu subtrahieren, sodass $n-k$ verbleiben.

U_1: Hier ergibt sich das gleiche Resultat wie bei U_2.

U_7: Alle Quadrat-Elemente werden von U_7 stabilisiert, also $(n-k+1)^2$ Stück. Andererseits ist U_7 in jeder der größeren Gruppen enthalten, wir müssen also alle Quadrat-Elemente subtrahieren, die einen größeren Stabilisator als U_7 haben. Wir unterscheiden unsere üblichen Fälle:
n und k haben verschiedene Zweierreste: Dann verbleiben $(n-k+1)^2-2(n-k+1)$ Quadrat-Elemente, die U_7 als Stabilisator haben.
n und k haben den gleichen Zweierrest: Dann verbleiben $(n-k+1)^2-4(n-k)-1$ Quadrat-Elemente, die U_7 als Stabilisator haben.

Abschluss: In diesem letzten Abschnitt können wir nun verwenden, dass die Bahn eines beliebigen Quadrat-Elements genau so lang ist (genau so viele verschiedene Quadrat-Elemente umfasst), wie der Index des Stabilisators in der Gesamtgruppe ist, und das ist genau die Elementezahl der Gesamtgruppe durch die Elementezahl des Stabilisators. Und wenn wir uns nur für die geometrisch verschiedenen Quadrat-Elemente interessieren, müssen wir die jeweilige Zahl von Quadrat-Elementen durch diesen Index teilen, denn so viele physisch verschiedene Quadrat-Elemente sind ja geometrisch gleich. Deshalb muss für U_7 durch 8 geteilt werden, für U_2 bis U_4 und U_6 durch 4, für U_5, U_8 und U_9 durch 2 und für U_{10} durch 1. Damit ergibt sich in den beiden zu unterscheidenden Fällen:
n und k haben verschiedene Zweierreste:

$$1+\frac{n-k}{4}+\frac{n-k}{4}+\frac{n-k}{4}+\frac{n-k}{4}+\frac{(n-k+1)^2-4(n-k)-1}{8}=\frac{(n-k+1)^2+4(n-k)+7}{8}$$

n und k haben den gleichen Zweierrest:

$$\frac{n-k+1}{4}+\frac{n-k+1}{4}+\frac{(n-k+1)^2-2(n-k+1)}{8}=\frac{(n-k+1)^2+2(n-k+1)}{8}$$

Damit ist alles gezeigt. ∎

3 Zwei $k \times k$-Quadrate

In diesem Kapitel werden wir nun die wesentlich interessantere, aber auch komplexere Frage angehen, wie viele physisch verschiedene und wie viele geometrisch verschiedene Quadrat-Elemente mit 2 'kleinen' $k\times k$-Quadraten, die sich zwar berühren, aber nicht durchdringen dürfen, in einem großen $n \times n$-Quadrat es gibt.

Zuerst werden wir wieder die Anzahl physisch verschiedener solcher Elemente bestimmen, einerseits, weil das ein eigenständiges Resultat darstellt, andererseits, weil wir es im Folgenden, nämlich der Bestimmung der Anzahl der geometrisch verschiedenen solchen Elemente, sowieso benötigen. Die letztere Aufgabe wird eine vierfache Fallunterscheidung erfordern, nämlich nach dem Zweierrest von n und dem Zweierrest von k.
Im Wesentlichen folgen wir dem vorhin eingeschlagenen Weg, müssen aber nicht nur mehr Fälle unterscheiden, sondern an einigen Stellen auch etwas eleganter vorgehen, um unsere Arbeit nicht unnötig aufzublähen. Beginnen wir mit der Gesamtzahl, die noch keine Fallunterscheidung erfordert.

3.1 Die Gesamtzahl der 'gefüllten' Quadrate

Als Resultat dieses Abschnitts haben wir ein Polynom 4. Grades in n (übrigens auch in k und in n und k, das Letztere bedeutet, dass die Exponentensumme der Variablen n und k nie den Wert 4 überschreitet, wohl aber

annimmt) zu erwarten. Vom Denken des Praktikers / der Praktikerin (Ingenieure denken gerne so und manchmal auch Experimentalphysiker) her ist das selbstverständlich, denn unsere Wahl der zwei kleinen $k \times k$-Quadrate hat ja vier 'Freiheitsgrade', also insgesamt vier Koordinaten zwischen 0 und $n-k$, das ergibt $(n-k+1)^4$ Möglichkeiten, und die Koordinaten, die wir wegen gegenseitiger Durchdringung der beiden Quadrate ausschließen müssen, lassen sozusagen eben nur einen gewissen 'Prozentsatz' der $(n-k+1)^4$ Möglichkeiten bestehen bleiben.
Wenn man dieses Argument akzeptierte[3], könnte man die Formel recht leicht finden: Man würde genügend viele Beispiele berechnen, z.B. mit einem Programm, hier sollten 15 genügen (für jedes feste k übrigens deren 5), sodann setzte man ein entsprechendes LGS an und berechnete die Koeffizienten des Polynoms, eine Aufgabe, die sogar der GTR, der sich ehedem an der Schule herumtrieb, hätte übernehmen können. Und in der Tat kann man sehr leicht beweisen, dass sich die tatsächliche Anzahl zwischen zwei entsprechenden Polynomen abschätzungsmäßig einpferchen lässt. Wüsste man nun bloß noch, dass das Ergebnis überhaupt polynomial ist, wäre das oben angedeutete Vorgehen gerechtfertigt. Aber für die Strenge eines mathematischen Beweises gibt es keinen Hinweis, warum das Resultat nicht deutlich komplizierter als ein Polynom sein sollte.[4]
Langer Rede kurzer Sinn: Es wird uns nicht erspart bleiben, den folgenden Satz 'the hard way' zu beweisen. Um Kleinheitsunfälle zu vermeiden, werden wir dabei stets $n \geq 3k-1$ fordern, wenngleich die erhaltene Formel in vielen Fällen auch für etwas kleinere n noch gilt.

Satz:

Es gibt genau

$$A_k(n) = \frac{1}{2}(n^4 - (4k-4)n^3 + (2k^2 - 8k + 5)n^2 + (8k^3 - 10k^2 + 2)n - 8k^4 + 20k^3 - 16k^2 + 4k)$$

Möglichkeiten, zwei $k \times k$-Quuadrate achsparallel so in einem achsparallelen $n \times n$-Quadrat zu platzieren, dass sie sich a) nicht gegenseitig durchdringen (berühren ist aber erlaubt!) und dass sie b) lauter ganzzahlige Koordinaten haben, wenn man die Koordinatisierung des großen Quadrats jeweils von $0 \ldots n$ gehen lässt.

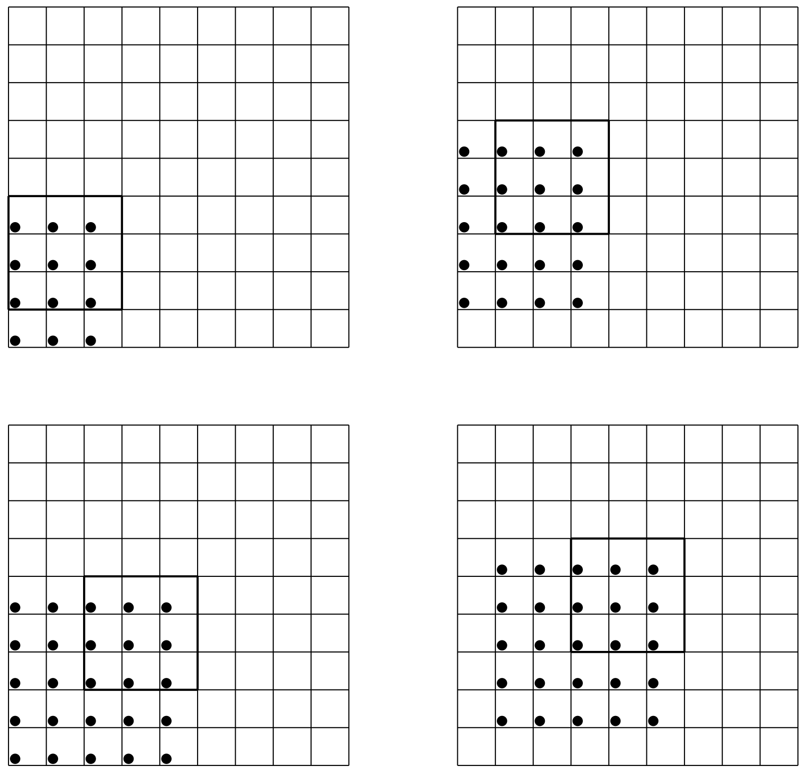
Beweis:

Wir werden die beiden $k \times k$-Quadrate in ein 'erstes' und ein 'zweites' unterscheiden und die erhaltene Anzahl von Möglichkeiten, da die beiden Quadrate ja austauschbar sind, am Ende durch 2 teilen. Wir werden uns für jede Lage des ersten Quadrats überlegen, wie viele Möglichkeiten es für das zweite Quadrat gibt, und schließlich — cum grano salis — über alle ersten Quadrate summieren. Wir parametrisieren unsere Quadrate über ihren LUP (linken unteren Punkt) und müssen dann nur jeweils die Möglichkeiten für den LUP des zweiten Quadrats bestimmen. Dabei müssen wir uns, wenn wir das große Quadrat so koordinatisieren, dass die möglichen Koordinaten von 0 bis n reichen können, überlegen, dass für einen LUP jeglichen Quadrates nur die Werte von $0 \ldots n-k$ in Frage kommen, da das Quadrat andernfalls das $n \times n$-Quadrat überschritte.

Bevor wir fortfahren, werden wir für den Fall $n = 9$ und $k = 3$ eine kleine Visualisierung vornehmen:

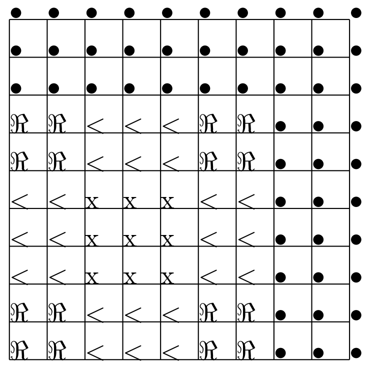
[3] Achtung! Konjunktivus irrealis!

[4] Zur Ehrenrettung der Praktiker sei hier zweierlei gesagt: Zum einen ist es ihnen um ein vernünftiges Resultat zu tun (mein akademischer Lehrer Prof. Dr. Roggenkamp formulierte das gerne recht knapp: 'Für einen Ingenieur ist die Frage: Hält die Brücke oder hält sie nicht?' Und der Autor möchte ergänzen: Und im ersteren Falle nicht: Kann das jemand theoretisch beweisen?) Und andererseits entwickeln viele Praktiker im Laufe der Zeit eine bewunderungswürdige Intuition dafür, wann man solche (mathematisch!) unsauberen Argumente anwenden darf und wann nicht. Das ist, glaube ich, der richtige Zeitpunkt, um eine Anekdote wiederzugeben, die ein Mathematiker auf einem an der Uni Stuttgart gehaltenen Vortrag aus erster Hand erzählte. Er und sein Team hatten sich modellierend mit Flächen im Dreidimensionalen beschäftigt, die die Flächen in menschlichen Gelenken gut annähern. Dabei machten sie — unter erheblichem mathematischen Aufwand — die verblüffende Entdeckung, dass die vertikale Belastbarkeit solcher Passungen deutlich zunahmen, wenn man die beiden Teile des Gelenks um wenige Grad gegenüber der (scheinbar) optimalen Passung verdrehte. Als sie damit freudestrahlend zu den Praktikern kamen, die Ersatzgelenke entwickeln, bekamen sie zur Antwort: Schön, dass ihr das theoretisch begründen könnt! Das machen wir seit 15 Jahren aus Erfahrung so!



Wir haben jeweils die Gitterpunkte, auf denen der LUP des zweiten Quadrates *nicht* angesiedelt werden darf, markiert. Die vierte Grafik illustriert die Tatsache, dass die Maximalzahl 'gesperrter' Punkte gleich $(2k-1)^2$ ist, nicht etwa $(2k+1)^2$, weil es ja erlaubt ist, dass die Quadrate sich berühren.[5] Sowohl die dritte (untere linke) Grafik als auch die Bemerkung in der Fußnote zeigen, dass die Grenzlage für diesen Fall genau dann eintritt, wenn der Abstand zu beiden Randlinien genau $k-1$ beträgt, ist er $k-2$ oder kleiner, sind wir in der Situation der Grafiken der ersten Zeile. Im rechten Fall haben wir die Situation illustriert, dass in y-Richtung ein Abstand von mindestens $k-1$ besteht, in x-Richtung hingegen nicht. Man kann sich leicht vorstellen, dass, gingen unsere Koordinaten auch ins Negative, ebenfalls $(2k-1)^2$ Koordinaten gesperrt wären, allein liegen diese nicht alle innerhalb des großen Quadrats. Für jede LE, die der LUP dem Rand des Quadrats näher als $k-1$ kommt, verschwindet eine der Zeilen oder Spalten der gesperrten Punkte außerhalb des Quadrats. Man hat dann, wieder im Sinne der Fußnote, also in der entsprechenden Richtung $2k-1-(k-1-i)=k+i$ gesperrte Koordinaten; im Falle der oberen rechten Skizze in nur einer Richtung, in der anderen die vollen $2k-1$, in der linken oberen Skizze in beiden Richtungen, dann ergeben sich $(k+i)(k+j)$ gesperrte Punkte.
Man man nun einwenden, dass die exakte Argumentation sich sehr auf Punkte bezogen hat, die sich im unteren linken Bereich des großen Quadrats befinden, die folgende Skizze wird einfach darstellen, dass das kein wirkliches Hindernis ist:

[5]Wer der Anschauung nicht einmal so weit traut, der stelle sich vor, der LUP des ersten Quadrats habe die Koordinaten $(i|j)$ mit $i,j\geq k-1$. Dann rangieren die gesperrten Punkte in x-Richtung von $i-k+1$ ($i-k$ ist noch möglich) bis $i+k-1$, das sind $2k-1$ gesperrte x-Koordinaten und in y-Richtung analog.



In der obigen Graphik stehen die $\bullet$-Zeichen an den Punkten, an denen sich a priori kein LUP befinden darf, die $\Re$-Zeichen für diejenigen Punkte, an denen der LUP des ersten Quadrats zu beiden Rändern weniger als $k-1$ Abstand hat, die $<$-Zeichen für diejenigen Punkte, die von einem Rand[6] mindestens $k-1$ Abstand hat, vom anderen aber weniger, und die 'x' schließlich markieren alle jene LUP, die von beiden Rändern mindestens $k-1$ entfernt sind, wobei die Entfernung nach rechts und oben nicht durch den veritablen Rand repräsentiert wird, sondern durch den Beginn des Bereiches, in den man innerhalb des großen Quadrates keine LUP setzen darf, weil sonst der ROP (rechte obere Punkt) des kleinen Quadrats unweigerlich außerhalb des großen Quadrates läge.
Wenn man also den Rand des Bereiches betrachtet, in dem keine $\bullet$-Zeichen stehen, fällt sofort auf, dass er bezüglich 90^o-Drehungen um den Mittelpunkt des von den 'x' besetzten Quadrates symmetrisch ist, und was solcherart symmetrisch ist, ist selbstverständlich auch bezüglich der gesperrten Punkte symmetrisch.
Mit anderen Worten: Die 4 $\Re$-Bereiche liefern die gleiche Anzahl von Möglichkeiten, es macht also gar nichts aus, dass wir uns vorhin vorstellungstechnisch auf den Fall des linken unteren solchen Bereiches konzentriert haben.
Seine Maße sind $(k-2)\times(k-2)$, und nach den vorigen Überlegungen liefert das insgesamt, wenn man über die möglichen Koordinaten $(i|j)$ summiert:

$$\sum_{i=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2}(n-k+1)^2-(k+i)(k+j)$$

Möglichkeiten.[7]
Das gleiche Symmetrieargument gilt für die $<$-Bereiche, weswegen wir uns nur mit dem unteren beschäftigen. Von unten nach oben läuft er von $0\ldots k-2$ mit den Einschränkungen auf den zweiten Faktor der zu sperrenden Koordinaten, die x-Koordinate geht von $k-1$ bis $n-(k-1)-(k-2)-1$, umfasst also $n-2k+2-(k-1)=n-3k+3$ Möglichkeiten, summiert ergibt sich

$$(n-3k+3)\sum_{j=0}^{k-2}(n-k+1)^2-(2k-1)(k+j)$$

als Anzahl der Möglichkeiten.
Und für die zentralen Lagen — die, wenn $n >> k$ ist, den Löwenanteil ausmachen und als einzige dafür sorgen, dass die Formel den Grad 4 hat — kennen wir nun Breite und Höhe des Bereiches, nämlich jeweils $n-3k+3$ und die Anzahl der jeweiligen Einschränkungen ist hier maximal, nämlich $(2k-1)^2$, also ergeben sich

$$(n-3k+3)^2((n-k+1)^2-(2k-1)^2)$$

[6] gemeint ist hier immer der näher gelegene Rand mit dieser Achsrichtung

[7] Wer wissen möchte, wie man solche Summen von Hand berechnet, ziehe das letztjährige Vorlesungsskript zu Rate, dort werden relativ ausführlich Theorie und Praxis polynomialer Summation erläutert; wir verwenden hier MAPLE, um Platz zu sparen (und um Rechenfehler zu vermeiden).

Möglichkeiten.
Wenn wir dies nun mit den entsprechenden Vielfachheiten zusammennehmen, erhalten wir:

$$\sum_{i=0}^{k-2}\sum_{j=0}^{k-2}(n-k+1)^2-(k+i)(k+j)+(n-3k+3)\sum_{j=0}^{k-2}(n-k+1)^2-(2k-1)(k+j)+(n-3k+3)^2((n-k+1)^2-(2k-1)^2)$$

$$= n^4-(4k-4)n^3+(2k^2-8k+5)n^2+(8k^3-10k^2+2)n-8k^4+20k^3-16k^2+4k$$

Da wir nun aber jedes Element doppelt gezählt haben — das eine Quadrat einmal als erstes und einmal als zweites —, muss noch durch 2 geteilt werden, und wir erhalten die im Satz angekündigte Anzahl. ∎

3.2 Geometrisch verschiedene 'gefüllte' Quadrate

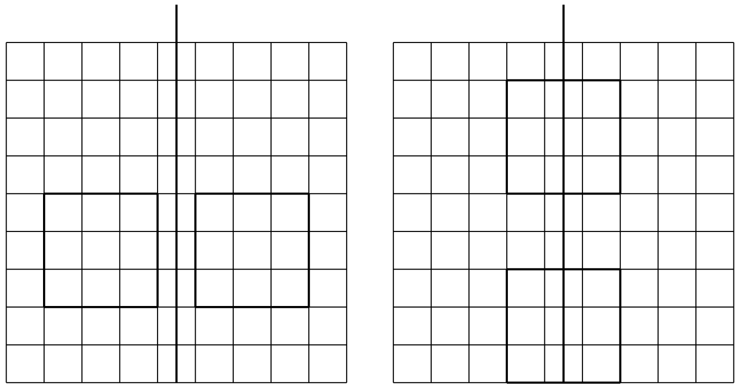
In diesem Abschnitt wiederholen wir das Programm, das wir schon für ein $k \times k$-Quadrat durchgeführt haben: Wir bestimmen zunächst, wie viele Elemente von welcher der 10 Untergruppen der Symmetriegruppe des großen Quadrats stabilisiert werden, sodann berechnen wir per Subtraktion, wie viele *genau* von der entsprechenden Untergruppe (also nicht von einer größeren, im Sinne des Enthaltenseins) stabilisiert werden — was in der Sprache der Gruppentheorie bedeutet, dass diese Untergruppe der Stabilisator des fraglichen Elements ist — und wenn wir das haben, wenden wir erneut das Bahnenlemma an, um eine Formel für die Gesamtzahl zu erhalten. Die nötigen Fallunterscheidungen nach den Zweierresten von n und k werden wir für jede Untergruppe — soweit nötig — durchführen, und am Schluss nochmals für das Endresultat. Die Nummerierung der Untergruppen bleibt gleich zu der in unserem algebraischen Vorspann.

3.2.1 Die Untergruppen U_5 und U_{10}

Beide Untergruppen stabilisieren keines der Elemente. Ein Element kann von einer Abbildung — das ist eine Überlegung, die für alle Abbildungen gilt — nur dann stabilisiert werden, wenn die beiden kleinen Quadrate entweder beide fix bleiben oder gegeneinander ausgetauscht werden. Sowohl U_5 also auch U_{10} enthalten die 90^o-Drehung um den Mittelpunkt des großen Quadrates. Unter dieser kann ein kleines Quadrat aber nur fix bleiben, wenn sein Mittelpunkt fix bleibt. Da der Mittelpunkt des großen Quadrates der einzige Fixpunkt der Drehung ist, muss also der Mittelpunkt des kleinen Quadrates der des großen sein, und damit gibt es höchstens — nämlich nur dann, wenn der Zweierrest von n und k übereinstimmen, sonst haben nämlich die Ecken des kleinen Quadrats keine ganzen Koordinaten — *ein* solches kleines Quadrat. Und dass eines fix bleibt, das andere aber nicht, ist bei insgesamt nur 2 kleinen Quadraten natürlich völlig ausgeschlossen (bei 3 kleinen Quadraten wäre es möglich). Folglich müssen die beiden kleinen Quadrate gegenseitig Bild-Urbild-Paare unter der 90^o-Drehung sein. Dann werden sie aber beide von der 180^o-Drehung um den Mittelpunkt des großen Quadrates auf sich selbst abgebildet. Mit dem gleichen Argument wie für die 90^o-Drehung gibt es aber nur (höchstens) ein kleines Quadrat mit dieser Eigenschaft, und nicht deren zwei.
Damit ist gezeigt, dass kein Element von der 90^o-Drehung stabilisiert werden kann, und damit erst recht nicht von allen Elementen von U_5 oder U_{10}.

3.2.2 Die Untergruppen U_1 und U_2

U_1 enthält neben der Spiegelung an der vertikalen Mittelachse s_V nur noch die identische Abbildung, die alles stabilisiert, die wir also ignorieren können; die Frage ist nur: Welche / wie viele Elemente werden von der Spiegelung s_V stabilisiert?
Dafür gibt es prinzipiell wieder zwei Möglichkeiten: Entweder bleiben beide kleinen Quadrate für sich fix oder sie werden gegenseitig aufeinander gespiegelt. Dafür wieder zwei Skizzen (wieder für den Fall $n = 9$ und $k = 3$):



Die erste der beiden oben abgebildeten Situationen — die beiden kleinen Quadrate werden gegenseitig aufeinander gespiegelt — hat die Eigenschaft, dass stets eines der beiden Quadrate ganz links — Berührung der Achse ist erlaubt, falls das möglich ist — und das andere ganz rechts der Achse liegt und durch die Wahl des linken eindeutig festgelegt ist. Verschiedene linke Quadrate liefern selbstverständlich verschiedene Paare, somit müssen wir nur zählen, wie viele kleine Quadrate ganz in den Bereich links der Achse passen.
Die zweite der abgebildeten Situationen existiert unter unseren Vorgaben (ganze Koordinaten!) nur dann, wenn entweder n und k beide gerade oder beide ungerade sind; in den anderen beiden Fällen müssten sich die Koordinaten entweder um die Hälfte einer geraden Zahl um eine gebrochene Zahl verteilen, also selber gebrochen sein (k gerade und n ungerade) oder sie müssten sich um die Hälfte einer ungeraden Zahl um eine ganze Zahl (die Hälfte von n) verteilen, also wieder gebrochen sein (k ungerade und n gerade).
Nun, wenn wir in die konkreten Berechnungen gehen, ist es Zeit, die angekündigte Fallunterscheidung durchzuführen:

n gerade, k gerade:

Betrachten wir für die linke Situation wieder mögliche LUP. Deren x-Koordinate kann sich von $0 \ldots \frac{n}{2} - k$ bewegen (im rechten Grenzfall stößt das kleine Quadrat an die Spiegelachse, die die Gleichung $x = \frac{n}{2}$ hat, an), die y-Koordinate kann von $0 \ldots n - k$ rangieren. Das ergibt $(\frac{n}{2} - k + 1) \cdot (n - k + 1)$ Möglichkeiten.
Die rechte Situation parametrisieren wir nach dem unteren der beiden Quadrate. Setzen wir das untere wie in der Skizze auf dem unteren Rand des großen Quadrates an, so kann der LUP des oberen von $k \ldots n - k$ rangieren, hat also $n - 2k + 1$ Möglichkeiten. Versetzen wir das untere um 1 nach oben, gibt es für das obere noch $n - 2k$ Möglichkeiten und so weiter (man beachte, dass unten evtl. frei werdende LUP nicht besetzt werden dürfen, wir zählen nur LUP des *oberen* Quadrates — und vermeiden gleichzeitig Doppelzählungen).
Somit ergeben sich $\sum_{i=1}^{n-2k+1} i = \frac{1}{2}(n - 2k + 1)(n - 2k + 2)$ Möglichkeiten. Zusammen ergeben sich

$$n^2 - (\frac{7}{2}k - 3)n + 3k^2 - 5k + 2$$

Elemente.

n gerade, k ungerade:

Für die linke Situation kann x wie gehabt von $0 \ldots \frac{n}{2} - k$ rangieren und y wieder von $0 \ldots n - k$, sodass sich $(\frac{n}{2} - k + 1) \cdot (n - k + 1)$ Möglichkeiten ergeben. Die rechte Situation kann nicht eintreten, deshalb gibt es insgesamt

$$(\frac{n}{2} - k + 1) \cdot (n - k + 1) = \frac{1}{2}n^2 - (\frac{3}{2}k - \frac{3}{2})n + k^2 - 2k + 1$$

Elemente.

n ungerade, k gerade:

Nun hat die Spiegelachse bei $x = \frac{n}{2}$ gebrochene Koordinaten, die rechte Seite eines sich links dieser Achse befindlichen kleinen Quadrates darf also maximal die x-Koordinate $\frac{n-1}{2}$, der LUP also höchstens die x-Koordinate $\frac{n-1}{2} - k$ haben, die y-Koordinate ist wieder beliebig zwischen 0 und $n - k$, sodass sich gemäß der linken Skizze genau $(\frac{n-1}{2}-k+1)(n-k+1)$ Möglichkeiten ergeben. Wiederum kann die Situation der rechten Skizze nicht eintreten, somit gibt es insgesamt

$$(\frac{n-1}{2}-k+1)(n-k+1)=\frac{1}{2}n^2-(\frac{3}{2}k-1)n+k^2-\frac{3}{2}k+\frac{1}{2}$$

Elemente.

n ungerade, k ungerade:
Für die linke Situation gibt es wieder $(\frac{n-1}{2}-k+1)(n-k+1)$ Möglichkeiten, diese Zahl war offensichtlich nicht von der Gestalt von k abhängig. Im Gegensatz zum vorigen Fall gibt es aber nun auch wieder für die rechte Skizze Beispiele. Wenn wir uns ansehen, wie wir deren Anzahl im ersten Fall ermittelt haben, fällt sofort auf, dass diese Bestimmung nicht davon abhängig war, welchen Zweierrest n und k haben. Somit gibt es hierfür $\frac{1}{2}(n-2k+1)(n-2k+2)$ Möglichkeiten und zusammen ergeben sich

$$(\frac{n-1}{2}-k+1)(n-k+1)+\frac{1}{2}(n-2k+1)(n-2k+2)=n^2-(\frac{7}{2}n-\frac{5}{2})n+3k^2-\frac{9}{2}k+\frac{3}{2}$$

Elemente.

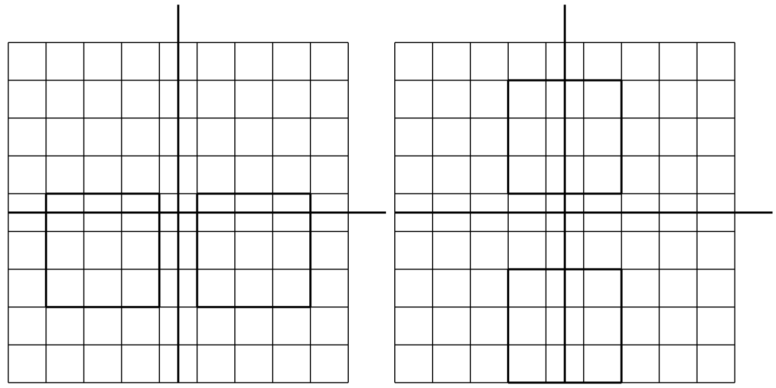
Für U_2 ergeben sich exakt die gleichen Werte, man ersetze in der obigen Herleitung stets oben/unten mit rechts/links und vice versa und sieht, dass die Argumentation exakt durchgeht. Man kann selbstverständlich auch jedes von s_V stabilisierte Element an der Winkelhalbierenden spiegeln und erhält ein von s_H stabilisiertes und vice versa, was die Elemente, die von s_H stabilisiert werden in Bijektion zu denen setzt, die von s_V stabilisiert werden, woraus sich ebenfalls die Gleichmächtigkeit der beiden Mengen ergibt.

3.2.3 Die Untergruppe U_8

Wir schließen diese Untergruppe sofort an, weil sie U_1 und U_2 enthält.[8] Damit ist klar, dass jedes Element, das von U_8 stabilisiert werden soll, auch von s_H und s_V stabilisiert werden muss. Zusätzlich muss es von id und d_{180^o} stabilisiert werden. Das erste stellt keine Bedingung dar und das zweite können wir ignorieren, wenn wir uns an die Erkenntnis der 5. Klasse erinnern, dass wenn ein Objekt zwei sich senkrecht schneidende Symmetrieachsen besitzt, der Schnittpunkt dieser Achsen stets ein Symmetriepunkt des Objekts ist, anders gesprochen: Ein Element, das von s_H und s_V stabilisiert ist (also symmetrisch bezüglich der beiden Achsen ist), automatisch auch punktsymmetrisch bezüglich dem Mittelpunkt des großen Quadrats ist; und da die Punktspiegelung am Mittelpunkt identisch mit der 180^o-Drehung um diesen Mittelpunkt ist, ist das Element automatisch auch symmetrisch bezüglich d_{180^o}, wird also von d_{180^o} stabilisiert.[9]
Wir müssen uns also fragen, welche Elemente sowohl von s_H als auch von s_V stabilisiert werden. Schauen wir uns dazu nochmals die beiden in Frage kommenden Situationen für von s_V stabilisierten Elemente an und fragen uns, welche auch durch die horizontale Achse stabilisiert werden:

[8] und algebraisch von diesen beiden erzeugt wird, woraus mit Mitteln der Algebra nicht besonders schwierig gefolgert werden kann, dass die Menge der von U_8 stabilisierten Elemente die Schnittmenge der von U_1 und der von U_2 stabilisierten Elemente ist. So wollen wir hier aber nicht vorgehen, weil das im gegebenen Rahmen gar nicht notwendig ist.

[9] Man könnte hier wieder einwenden, dass man in der 5. Klasse kaum etwas begründet und nichts bewiesen, sondern nur 'entdeckt' hat, was als Einwand ja nicht falsch ist. Wer also ein sicheres Argument möchte, der schaue sich an, was bei s_H und s_V mit den LUP der gespiegelten Quadrate geschieht. Dann führe er/sie s_v und s_H hintereinander aus und vergleiche, was mit dem LUP unter d_{180^o} geschieht, dann sieht man sofort, dass zumindest für die kleinen Quadrate $s_H \circ s_V = d_{180^o}$ gilt (dass das dann auch allgemein gilt, geht über (heutigen) Schulstoff hinaus, ist aber richtig), und das genügt, um argumentieren zu können: Ein Element, das sowohl von s_H als auch s_V stabilisiert wird, wird auch von d_{180^o} stabilisiert.
Allgemein gilt übrigens, dass die Hintereinanderausführung zweier Spiegelungen an zwei Geraden, die sich schneiden, die Drehung um den Schnittpunkt mit dem doppelten Schnittwinkel der Geraden ergibt.



Die linke Situation ist, so wie wir sie gezeichnet haben, nicht symmetrisch bezüglich s_H, sie wird es aber, wenn wir die beiden Quadrate um eins nach oben schieben, sodass sie von s_H jeweils auf sich selbst abgebildet werden, weil sie in vertikaler Richtung sich hälftig um die Mitte verteilen. Auch die rechte Situation ist so wie abgebildet nicht symmetrisch bezüglich s_H, wird es aber, wenn wir das obere kleine Quadrat um 1 nach oben schieben, sodass die beiden von der vertikalen Mittelachse halbierten Quadrate symmetrisch in y-Richtung bezüglich der horizontalen Mittelachse liegen.
Wir haben aber gesehen, dass es notwendig ist, dass eines die beiden Quadrate bezüglich einer der beiden Spiegelachsen mittig sitzt (das andere dann natürlich auch), was aber nach unseren vorigen Erkenntnissen nur möglich ist, wenn der Zweierrest von n und k übereinstimmen. In diesem Fall müssen wir noch etwas genauer hinschauen.
Wir kommen zu unserer obligaten Fallunterscheidung:

n **gerade,** k **gerade:**
In der linken Situation haben wir dann, dass beim linken Quadrat x von $0 \ldots \frac{n}{s} - k$ rangieren darf (das rechte Quadrat liegt wegen der Symmetrie bezüglich s_V fest) und $y = \frac{n}{2} - \frac{k}{2}$ sein muss, was $\frac{n}{2} - k + 1$ Möglichkeiten ergibt.
Die Elemente, die zur rechten Situation passen, sind offensichtlich an der Diagonalen gespiegelte Elemente von Situation 1 und vice versa, weshalb es von ihnen gleich viele gibt.
Zusammen erhalten wir also $n - 2k + 2$ Elemente, die von U_8 stabilisiert werden.

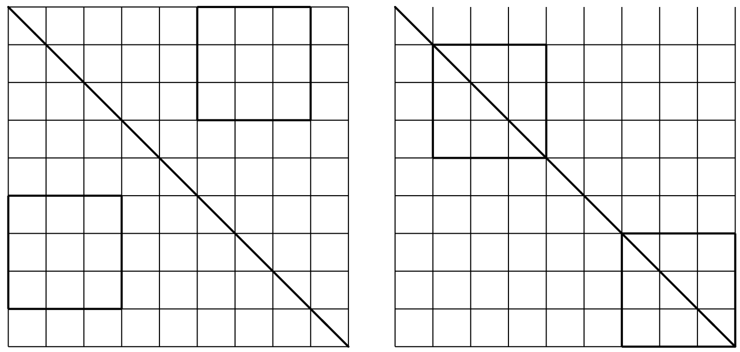
n **gerade,** k **undgerade:**
Nach dem vorher Gesagten, kann es in diesem Falle keine Elemente, die von U_8 stabilisiert werden, geben.

n **ungerade,** k **gerade:**
dito

n **ungerade,** k **ungerade:**
In der linken Situation kann x von $0 \ldots \frac{n-1}{2} - k$ rangieren, was $\frac{n-1}{2} - k + 1$ Möglichkeiten liefert. Die rechte Situation ist spiegelbildlich, sodass sich zusammen $n - 2k + 1$ von U_8 stabilisierte Elemente ergeben.

3.3 Die Untergruppen U_3 und U_4

Obwohl es sich auch hier um zwei Spiegelungen handelt, werden wir andere Resultate erhalten als zuvor. Das liegt hauptsächlich daran, dass die beiden Diagonalen, an denen hier gespiegelt wird, ein kleines Quadrat symmetrisch teilen können, egal ob n und k gerade oder ungerade sind.
Wir betrachten zunächst U_3, die neben der Identität, um die wir uns nicht zu sorgen brauchen, s_{Hd}, die Spiegelung an der von links oben nach rechts unten verlaufenden Hauptdiagonalen, enthält. Wieder gibt es zwei Situationen, wie ein Element aussehen kann, das von s_{Hd} stabilisiert wird, was wir wiederum mit einer Skizze verdeutlichen wollen:



Wieder ist die linke Situation diejenige, in der die beiden Quadrate vice versa ein Bild-Urbild-Paar bezüglich der Spiegelung darstellen, sodass die kleinen Quadrate zwar nicht fix bleiben unter der Spiegelung, aber gegeneinander ausgetauscht werden, sodass das Element insgesamt stabilisiert wird, wohingegen in der rechten Situation beide kleinen Quadrate für sich betrachtet (als Ganzes) fest bleiben.
Betrachten wir zunächst die linke Situation: Mit dem unteren Quadrat liegt das Element eindeutig fest, weil das obere ja einfach die Spiegelung des unteren kleinen Quadrats an der Hauptdiagonalen sein muss. Das linke kleine Quadrat kann in seinem ROP die Hauptdiagonale berühren, es darf aber von ihr nicht durchdrungen werden, da es sich sonst mit seinem Spiegelbild überlappen würde. Für $x = 0$ darf der y-Wert des ROP höchstens $n - k$ sein, der y-Wert des LUP kann also höchstens $n - 2k$ betragen, was $n - 2k + 1$ Möglichkeiten liefert. Versetzen wir das Quadrat um 1 nach rechts, verlieren wir eine Möglichkeit, bis es bei $x = n - 2k$ schließlich nur noch eine einzige gibt. Wir haben also insgesamt $\sum_{i=1}^{n-2k+1} i$ Möglichkeiten, und wir weisen explizit darauf hin, dass für dieses Zwischenresultat die Zweierreste von n und k unerheblich sind.
In der rechten Situation beginnen wir wieder mit der x-Koordinate 0 für das linke kleine Quadrat. Wir können die x-Koordinate des rechten dann von $k \dots n-k$ rangieren lassen, haben also $n-2k+1$ Möglichkeiten für das rechte kleine Quadrat. Rücken wir das linke um eine Position nach rechts (und unten!) verlieren wir eine Möglichkeit und so weiter, bis wir bei $x = n - 2k$ nur noch eine Möglichkeit haben. Wiederum spielt der Zweierrest von n und k keine Rolle. Wir zählen hier — wie in den vorangegangenen Unterabschnitten — auch nichts doppelt, weil das erste gewählte Quadrat immer das linke ist, also nicht nochmals als das rechte auftreten kann! Wir sehen, dass wir hier gleichfalls $\sum_{i=1}^{n-2k+1} i$ Möglichkeiten haben, was zusammen

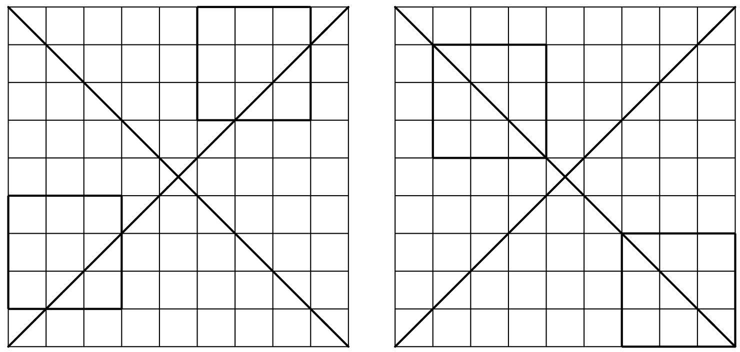
$$2 \sum_{i=1}^{n-2k+1} i = n^2 - (4k-3)n + 4k^2 - 6n + 2$$

Elemente, die von U_3 stabilisiert werden, ergibt, und das unabhängig vom Zweierrest von n und k.

Wenn wir irgendein Element, das von s_{Hd} stabilisiert wird, mit s_H spiegeln, so erhalten wir ein Element, das von S_{Nd} stabilisiert wird und vice versa, was bedeutet, dass die Anzahl stabilisierter Elemente für s_{Nd} gleich ist wie die Anzahl von s_{Hd} stabilisierter Elemente.
Wir erhalten also für U_4 die gleiche Anzahl von U_4 stabilisierter Elemente wie bei U_3.

3.4 Die Untergruppe U_9

Nachdem U_9 von U_3 und U_4 erzeugt wird, und mit den gleichen Argumenten, mit denen wir ein analoges Resultat für U_8 eingesehen haben, sieht man, dass ein Element genau dann von U_9 stabilisiert wird, wenn es von s_{Hd} und von s_{Nd} stabilisiert wird, und nachdem deren Resultate nicht von den Zweierresten von n und k abhängig waren, sollte man das auch von der Anzahl für U_9 erwarten, es wird sich aber herausstellen, dass dem nicht so ist (und dabei auch 'sehen', woran das liegt).
Wenn man in die obigen Skizzen die Nebendiagonale einzeichnet, sieht man aber eine ganz ähnliche Situation wie zuvor:



Beide oben abgebildeten Elemente werden von s_{Nd} nicht stabilisiert. In der linken Situation haben wir ein Bild-Urbild-Paar bezüglich s_{Hd}, unter s_{Nd} werden sie auf andere Quadrate abgebildet (auf die gleichen ist nur für das Mittelquadrat möglich, aber davon gibt es eben wieder nur höchstens eines), sodass sich insgesamt mehr als zwei kleine Quadrate in dem Element befinden müssten, was nicht der Fall ist. Es würde in der linken Situation also nur genau dann funktionieren, wenn die beiden kleinen Quadrate (das untere um 1 nach unten, das obere um 1 nach rechts) so versetzt würden, dass sie von s_{Nd} jedes auf sich selbst abgebildet werden. Situation 1 ist also nur zu retten, wenn die beiden Quadrate von der Nebendiagonalen hälftig geteilt werden und symmetrisch bezüglich der Hauptdiagonalen sind.
In der rechten Situation werden beide Quadrate von der Spiegelung an der Hauptdiagonalen für sich fixiert, aber sie sind nicht symmetrisch bezüglich der Spiegelung an der Nebendiagonalen, was man durch Verschieben eines der beiden Quadrate, zum Beispiel des oberen um 1 nach links und oben, bewerkstelligen kann.
Ganz analog zu den Resultaten für U_8 ergeben sich zwei analoge, aber sicher disjunkte Situationen: Entweder werden beide Quadrate von der Hauptdiagonalen halbiert und sind symmetrisch bezüglich der Nebendiagonalen oder anders herum. Für beide wird es gleich viele Möglichkeiten geben, bleibt uns nur noch zu bestimmen, wie viele. Und hier wird sich herausstellen, dass das zwar nicht vom Zweierrest von k, wohl aber von dem von n abhängt.

n **gerade:**

Wir beschränken uns auf die Situation, dass die kleinen Quadrate von der Hauptdiagonalen für sich als Ganzes festgelassen werden. Für den LUP des oberen kommen dann x-Koordinaten von $0 \ldots \frac{n}{2} - k$ in Frage (gingen wir darüber hinaus, hätten wir Durchdringung oder wir wählten das untere Quadrat und zählten doppelt), alles Weitere, sowohl die y-Koordinate als auch das zweite kleine Quadrat liegen dann fest. Wir haben also $\frac{n}{2} - k + 1$ Möglichkeiten, und ebenso viele für die zweite Situation, sodass wir insgesamt

$$n - 2k + 2$$

Elemente haben, die von U_9 stabilisiert werden.

n **ungerade:**

Die Situation ist ganz analog zur vorigen, nur dass wir x nur von $0 \ldots \frac{n-1}{2}$ laufen lassen dürfen, sonst treten schon Selbstdurchdringung (oder gebrochene Koordinaten) ein, sodass sich insgesamt nur

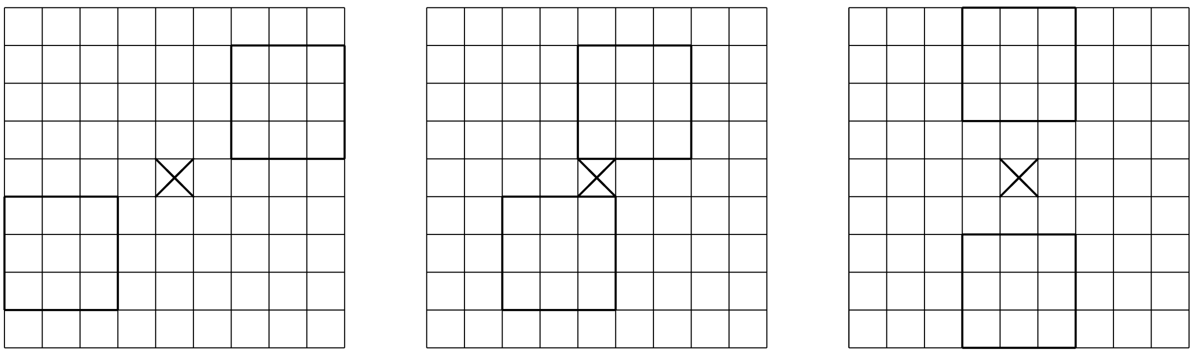
$$n - 2k + 1$$

Elemente, die von U_9 stabilisiert werden, ergeben.

3.5 Die Untergruppe U_6

U_6 ist die von der 180^o-Drehung erzeugte Untergruppe, sie enthält außer der Drehung nur noch die Identität, die wir wieder ignorieren dürfen, weil sie sowieso alles stabilisiert. Wir müssen uns also nur fragen, welche Elemente von d_{180^o}, also von der Punktspiegelung am Mittelpunkt des großen Quadrats stabilisiert werden.

Da es nur ein einziges kleines Quadrat gibt, das von der Punktspiegelung als Ganzes festgelassen wird, nämlich das, dessen Mittelpunkt gleichfalls der Mittelpunkt des großen Quadrates ist, ist es nicht möglich, eine Situation zu haben, in der beide kleinen Quadrate für sich fest bleiben.
Wir können also nur eine Situation haben, bei der das eine kleine Quadrat auf das andere punktgespiegelt wird und vice versa; und dass das überhaupt möglich ist, liegt natürlich daran, dass die Punktspiegelung wie auch die Achsenspiegelungen zweimal angewendet die Identität ergeben, sodass jedes Bild-Urbild-Paar bezüglich einer Spiegelung automatisch die gewünschte Eigenschaft hat, dass Quadrat 1 auf Quadrat 2 und Quadrat 2 auf Quadrat 1 gespiegelt wird.
Wir zählen wieder die möglichen solchen Paare und vermeiden erneut von vornherein Doppelzählungen. Wir haben es dann wesentlich mit 3 Situationen zu tun:



In der Situation links befindet sich das gewählte Quadrat ganz links vom Symmetriepunkt, es kann also beliebig nach oben und unten verschoben werden.
In der Situation in der Mitte befindet sich das gewählte Quadrat mehrheitlich links des Symmetriepunkts, es hat aber auch (geringere) Anteile rechts davon, hier werden wir nicht beliebig nach oben und unten schieben können, weil der Symmetriepunkt nicht innerhalb des gewählten Quadrats sein darf (sonst geschieht beim Spiegeln wieder eine Durchdringung).
Und in der Situation rechts ist das gewählte Quadrat in x-Richtung hälftig um die Mitte verteilt, aus Gründen der Dublettenvermeidung muss es ganz unterhalb des Spiegelpunktes liegen.
Bevor wir ans Zählen gehen, was wir wieder nicht ganz ohne Fallunterscheidung unternehmen werden, wollen wir kurz innehalten, um zu begründen, warum wir alle möglichen Elemente nun genau einmal erhalten: Wenn die kleinen Quadrate punktsymmetrisch zum Mittelpunkt des großen Quadrates liegen, gibt es nur zwei Möglichkeiten: Entweder liegen sie beide in x-Richtung mittig, und dann eines von beiden unterhalb des Mittelpunkts, oder eines von beiden liegt in x-Richtung weiter links als das andere (weil Punktspiegeln links/rechts und oben/unten vertauscht), dann liegt sein 'Löwenanteil', evtl. sogar alles, links des Mittelpunkts. Damit haben wir es sicher bei unserer vorigen Aufzählung erwischt. Andererseits haben wir stets wenn möglich das linke Quadrat gewählt, sodass wir in der Situation links und Mitte nichts doppelt zählen können, und in der Situation rechts stets das untere Quadrat, wir zählen also auch hier jedes Element nur einmal.
Und nun zu den Fallunterscheidungen:

n gerade, k gerade:

Für die linke Situation darf die x-Koordinate des LUP von $0 \ldots \frac{n}{2}-k$ gehen, die y-Koordinate von $0 \ldots n-k$. Wir erhalten also $(\frac{n}{2}-k+1)(n-k+1)$ Möglichkeiten.
Für die mittlere Situation muss x zwischen $\frac{n}{2}-k+1 \ldots \frac{n}{2}-\frac{k}{2}-1$ rangieren und für y sind zwischen $0 \ldots n-k$ diejenigen $k-1$ Fälle zu streichen, bei denen sich der Mittelpunkt des großen Quadrats innerhalb des kleinen befinden würde. Es bleiben also $(\frac{k}{2}-1)(n-2k+2)$ Möglichkeiten.
Der/die aufmerksame Leser/in wird vielleicht bemerkt haben, dass unser letztes Argument im Falle $k=2$ reiner Unfug ist, da die rechte Grenze für x kleiner ist als die linke — ein typischer Kleinheitsunfall, der sich hier aber selbst repariert: Der auftretende Nonsens rührt nämlich daher, dass es diese Elemente für $k=2$ überhaupt nicht gibt, denn ein kleines Quadrat der Seitenlänge 2 liegt entweder ganz links des

Mittelpunkts (oder ganz rechts) oder es liegt in x-Richtung mittig zu ihm. Und freundlicherweise enthält unsere Formel den Faktor $(\frac{k}{2}-1)$, der für $k=2$ den ganzen Term zu 0 macht. Deshalb hat die Formel auch für $k=2$ ihre Richtigkeit.
Für die rechte Situation muss $x=\frac{n}{2}-\frac{k}{2}$ sein und die y-Koordinate des LUP kann von $0\ldots\frac{n}{2}-k$ rangieren, wir erhalten also zusätzlich $\frac{n}{2}-k+1$ Möglichkeiten.

In der Summe ergeben sich

$$(\frac{n}{2}-k+1)(n-k+1)+(\frac{k}{2}-1)(n-2k+2)+\frac{n}{2}-k+1=\frac{1}{2}n^2-(k-1)n$$

Elemente, die von U_6 stabilisiert werden.

n gerade, k ungerade:

Für die linke Situation kann x wieder von $0\ldots\frac{n}{2}-k$ rangieren und y von $0\ldots n-k$, sodass wir erneut $(\frac{n}{2}-k+1)(n-k+1)$ Möglichkeiten erhalten.
Für die mittlere Situation kann x von $\frac{n}{2}-k+1\ldots\frac{n}{2}-\frac{k}{2}-\frac{1}{2}$ rangieren, und für y gibt es wieder $n-2k+2$ Möglichkeiten, also $(\frac{k}{2}-\frac{1}{2})(n-2k+2)$ Möglichkeiten.
Die rechte Situation ist mit ganzen Koordinaten für die kleinen Quadrate nicht möglich.
Wir erhalten also zusammen

$$(\frac{n}{2}-k+1)(n-k+1)+(\frac{n}{2}-k+1)(n-k+1)=\frac{1}{2}n^2-(k-1)n$$

Elemente, die von U_6 stabilisiert werden.

n ungerade, k gerade:

In der linken Situation kann x von $0\ldots\frac{n-1}{2}-k$ rangieren (das kleine Quadrat muss bei $x=\frac{n}{2}$ stoppen, weil es ganze Koordinaten hat, muss es schon bei $\frac{n-1}{2}$ stoppen), und y kann wieder frei von $0\ldots n-k$ rangieren, was $(\frac{n-1}{2}-k+1)(n-k+1)$ Möglichkeiten liefert.
In der mittleren Situation kann x von $\frac{n-1}{2}-k+1\ldots\frac{n-1}{2}-\frac{k}{2}$ rangieren und für y sind genau k Werte verboten (man beachte, dass diesmal keines der kleinen Quadrate den Mittelpunkt des großen Quadrates am Rand haben kann, deshalb liegt er in k Fällen (verbotenerweise) im Inneren), also gibt es hierfür $n-2k+1$ Möglichkeiten. Für die mittlere Situation gibt es also insgesamt $\frac{k}{2}(n-2k+1)$ Möglichkeiten.
Und die rechte Situation kann wieder einmal nicht eintreten.

Somit gibt es insgesamt genau

$$(\frac{n-1}{2}-k+1)(n-k+1)+\frac{k}{2}(n-2k+1)=\frac{1}{2}n^2-(k-1)n-k+\frac{1}{2}$$

Elemente, die von U_6 stabilisiert werden.

n ungerade, k ungerade:

Für die linke Situation rangiert x von $0\ldots\frac{n-1}{2}-k$ und y von $0\ldots n-k$, was $(\frac{n-1}{2}-k+1)(n-k+1)$ Möglichkeiten liefert.
Für die mittlere Situation kann x von $\frac{n-1}{2}-k+1\ldots\frac{n}{2}-\frac{k}{2}-1$ rangieren und für y gibt es wieder $n-2k+1$ Möglichkeiten, sodass auf diese Situation $(\frac{k}{2}-\frac{1}{2})(n-2k+1)$ Möglichkeiten entfallen.
Bei dieser Konstellation von n und k gibt es auch wieder Möglichkeiten für die rechte Situation, x muss hier $\frac{n}{2}-\frac{k}{2}$ sein,[10] und y darf von $0\ldots\frac{n-1}{2}-k$ rangieren, was $\frac{n-1}{2}-k+1$ zusätzliche Möglichkeiten liefert.
Insgesamt werden also

$$(\frac{n-1}{2}-k+1)(n-k+1)+(\frac{k}{2}-\frac{1}{2})(n-2k+1)+\frac{n-1}{2}-k+1=\frac{1}{2}n^2-(k-1)n-k+\frac{1}{2}$$

Elemente, die von U_6 stabilisiert werden.

[10] Das muss es natürlich immer sein, aber wenn n und k denselben Zweierrest haben, ist diese Zahl ganz.

3.6 Die Untergruppe U_7

U_7 besteht ausschließlich aus der Identität und stabilisiert damit jedes der

$$\frac{1}{2}(n^4 - (4k-4)n^3 + (2k^2 - 8k + 5)n^2 + (8k^3 - 10k^2 + 2)n - 8k^4 + 20k^3 - 16k^2 + 4k)$$

Elemente.

3.7 Die bereinigten Werte

Was wir für die Anwendung des Bahnenlemmas wirklich benötigen, sind aber nicht die Zahlen, die wir oben bestimmt haben, also die Anzahl der Elemente, die von U_i stabilisiert werden, sondern die Anzahl der Elemente deren Stabilisator (die maximale Untergruppe, die sie stabilisiert) U_i ist. Wir müssen also alle Elemente subtrahieren, die von einer größeren (im Sinne der Enthaltensseinsrelation) Untergruppe stabilisiert werden. Und damit wir dabei nichts doppelt und dreifach subtrahieren, dürfen wir nur schon bereinigte Werte subtrahieren. (Sonst würde man ein Element, dessen Stabilisator U_8 und das deshalb auch von U_1 und U_2 stabilisiert wird, sowohl bezüglich U_8 als auch bezüglich U_1 und U_2, also insgesamt dreifach subtrahieren, obwohl es ja nur ein Element ist). Aus diesem Grunde ist es auch notwendig, den Bereinigungsprozess im Untergruppenverband von oben nach unten durchzuführen, damit wir für jede Untergruppe bereits bereinigte Werte subtrahieren können.

Damit wir unser Vorgehen besser koordinieren können, verwenden wir nun Buchstaben sowohl für die ursprünglichen als auch für die bereinigten Werte, und zwar erhalten die bereinigten einfach eine 1 nach dem gleichen Buchstaben.
In einer Liste für die unbereinigten Werte sieht das dann so aus:

Untergruppe	Variable
U_{10}	a
U_5	b
U_8	c
U_9	d
U_1	e
U_2	f
U_6	g
U_3	h
U_4	i
U_7	j

Die bereinigten Werte berechnen sich gemäß dem Untergruppenverband dann wie folgt:

$$\begin{aligned}
&a1 = a\\
&b1 = b - a1\\
&c1 = c - a1\\
&d1 = d - a1\\
&e1 = e - a1 - c1\\
&f1 = f - a1 - c1\\
&g1 = g - a1 - b1 - c1 - d1\\
&h1 = h - a1 - d1\\
&i1 = i - a1 - d1\\
&j1 = j - a1 - b1 - c1 - d1 - e1 - f1 - g1 - h1 - i1
\end{aligned}$$

Und das ist der Punkt, wo die Wege sich trennen, denn spätestens jetzt kommen wir nicht mehr um unsere übliche Fallunterscheidung herum. Aus Gründen der Einfachheit wollen wir es hier bei der Angabe der Resultate belassen und nicht einzeln die im Prinzip simple Rechnung mit Polynomen durchführen:

n **gerade,** k **gerade:**

$$
\begin{aligned}
&a1 = 0\\
&b1 = 0\\
&c1 = n - 2k + 2\\
&d1 = n - 2k + 2\\
&e1 = n^2 - (\tfrac{7}{2}k - 4)n + 3k^2 - 3k\\
&f1 = n^2 - (\tfrac{7}{2}k - 4)n + 3k^2 - 3k\\
&g1 = \tfrac{1}{2}n^2 - (k - 3)n + 4k - 4\\
&h1 = n^2 - (4k - 2)n + 4k^2 - 4k\\
&i1 = n^2 - (4k - 2)n + 4k^2 - 4k\\
&j1 = \tfrac{1}{2}n^4 - (2k - 2)n^3 + (k^2 - 4k - 2)n^2 + (4k^3 - 5k^2 + 16k - 8)n - 4k^4 + 10k^3 - 22k^2 + 16k
\end{aligned}
$$

Nach all dem zuvor Ausgeführten enthält eine Bahn unter der Symmetriegruppe genau so viele Elemente wie der Quotient die Anzahl der Elemente der Symmetriegruppe durch die Anzahl der Gruppenelemente des Stabilisators dieser Elemente (der sog. *Index* des Stabilisators). Wollen wir also nur Bahnen zählen — und denen entsprechen die geometrisch verschiedenen Elemente —, müssen wir für jede Untergruppe die Anzahl der Elemente, die sie als Stabilisator haben, durch den Index der Gruppe teilen.[11] Damit ist die Anzahl der geometrisch verschiedenen Elemente gleich

$$A_k(n) = a1 + \frac{1}{2}(b1 + c1 + d1) + \frac{1}{4}(e1 + f1 + g1 + h1 + i1) + \frac{1}{8}j1$$

$$= \frac{1}{16}n^4 - (\frac{1}{4}k - \frac{1}{4})n^3 + (\frac{1}{8}k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{7}{8})n^2 + (\frac{1}{2}k^3 - \frac{5}{8}k^2 - 2k + \frac{7}{4})n - \frac{1}{2}k^4 + \frac{5}{4}k^3 + \frac{3}{4}k^2 - \frac{5}{2}k + 1$$

n **gerade,** k **ungerade:**

$$
\begin{aligned}
&a1 = 0\\
&b1 = 0\\
&c1 = 0\\
&d1 = n - 2k + 2\\
&e1 = \tfrac{1}{2}n^2 - (\tfrac{3}{2}k - \tfrac{3}{2})n + k^2 - 2k + 1\\
&f1 = \tfrac{1}{2}n^2 - (\tfrac{3}{2}k - \tfrac{3}{2})n + k^2 - 2k + 1\\
&g1 = \tfrac{1}{2}n^2 - (k - 2)n + 2k - 2\\
&h1 = n^2 - (4k - 2)n + 4k^2 - 4k\\
&i1 = n^2 - (4k - 2)n + 4k^2 - 4k\\
&j1 = \tfrac{1}{2}n^4 - (2k - 2)n^3 + (k^2 - 4k - 1)n^2 + (4k^3 - 5k^2 + 12k - 7)n - 4k^4 + 10k^3 - 18k^2 + 14k - 2
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich die Anzahl geometrisch verschiedener Elemente zu

$$A_k(n) = \frac{1}{16}n^4 - (\frac{1}{4}k - \frac{1}{4})n^3 + (\frac{1}{8}k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{3}{4})n^2 + (\frac{1}{2}k^3 - \frac{5}{8}k^2 - \frac{3}{2}k + \frac{11}{8})n - \frac{1}{2}k^4 + \frac{5}{4}k^3 + \frac{1}{4}k^2 - \frac{7}{4}k + \frac{3}{4}$$

[11] Wir weisen darauf hin, dass es vorkommen kann, dass dieser Quotient keine ganze Zahl ist. Das liegt daran, dass eine Bahn Elemente mit (zwar nicht beliebig, aber doch) verschiedenen Stabilisatoren enthalten kann, sodass sich erst in der Summe wieder eine ganze Zahl ergibt.

n **ungerade,** k **gerade:**

$a1 = 0$
$b1 = 0$
$c1 = 0$
$d1 = n - 2k + 1$
$e1 = \frac{1}{2}n^2 - (\frac{3}{2}k - 1)n + k^2 - \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}$
$f1 = \frac{1}{2}n^2 - \quad (\frac{3}{2}k - 1)n + k^2 - \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}$
$g1 = \frac{1}{2}n^2 - (k-2)n + k - \frac{1}{2}$
$h1 = n^2 - (4k-2)n + 4k^2 - 4k + 1$
$i1 = n^2 - (4k-2)n + 4k^2 - 4k + 1$
$j1 = \frac{1}{2}n^4 - (2k-2)n^3 + (k^2 - 4k - 1)n^2 + (4k^3 - 5k^2 + 12k - 6)n - 4k^4 + 10k^3 - 18k^2 + 14k - \frac{7}{2}$

Damit ergibt sich die Anzahl geometrisch verschiedener Elemente zu

$$A_k(n) = \frac{1}{16}n^4 - (\frac{1}{4}k - \frac{1}{4})n^3 + (\frac{1}{8}k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{3}{4})n^2 + (\frac{1}{2}k^3 - \frac{5}{8}k^2 - \frac{3}{2}k + \frac{5}{4})n - \frac{1}{2}k^4 + \frac{5}{4}k^3 + \frac{1}{4}k^2 - \frac{7}{4}k + \frac{11}{16}$$

n **ungerade,** k **ungerade:**

$a1 = 0$
$b1 = 0$
$c1 = n - 2k + 1$
$d1 = n - 2k + 1$
$e1 = n^2 - (\frac{7}{2}k - \frac{3}{2})n + 3k^2 - \frac{5}{2}k + 1$
$f1 = n^2 - \quad (\frac{7}{2}k - \frac{3}{2})n + 3k^2 - \frac{5}{2}k + 1$
$g1 = \frac{1}{2}n^2 - (k+1)n + 3k - \frac{3}{2}$
$h1 = n^2 - (4k-2)n + 4k^2 - 4k + 1$
$i1 = n^2 - (4k-2)n + 4k^2 - 4k + 1$
$j1 = \frac{1}{2}n^4 - (2k-2)n^3 + (k^2 - 4k - 2)n^2 + (4k^3 - 5k^2 + 16k - 7)n - 4k^4 + 10k^3 - 22k^2 + 16k - \frac{7}{2}$

Damit ergibt sich die Anzahl geometrisch verschiedener Elemente zu

$$A_k(n) = \frac{1}{16}n^4 - (\frac{1}{4}k - \frac{1}{4})n^3 + (\frac{1}{8}k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{7}{8})n^2 + (\frac{1}{2}k^3 - \frac{5}{8}k^2 - 2k + \frac{13}{8})n - \frac{1}{2}k^4 + \frac{5}{4}k^3 + \frac{3}{4}k^2 - \frac{5}{2}k + \frac{15}{16}$$

Wir haben damit soeben folgenden Satz bewiesen:

Satz:

Wenn man zwei $k \times k$-Quadrate durchdringungsfrei, achsparallel und mit ganzen Koordinaten in ein $n \times n$-Quadrat (mit $n \geq 3k - 2$) einbaut (die Koordinatisierung sei so, dass $(0|0)$ und $(n|n)$ gegenüberliegende Ecken des großen Quadrates seien), dann gibt es dafür $A_k(n)$ geometrisch verschiedene Möglichkeiten, mit den vier Fällen:

n **gerade,** k **gerade:**

$$A_k(n) = \frac{1}{16}n^4 - (\frac{1}{4}k - \frac{1}{4})n^3 + (\frac{1}{8}k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{7}{8})n^2 + (\frac{1}{2}k^3 - \frac{5}{8}k^2 - 2k + \frac{7}{4})n - \frac{1}{2}k^4 + \frac{5}{4}k^3 + \frac{3}{4}k^2 - \frac{5}{2}k + 1$$

n **gerade,** k **ungerade:**

$$A_k(n) = \frac{1}{16}n^4 - (\frac{1}{4}k - \frac{1}{4})n^3 + (\frac{1}{8}k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{3}{4})n^2 + (\frac{1}{2}k^3 - \frac{5}{8}k^2 - \frac{3}{2}k + \frac{11}{8})n - \frac{1}{2}k^4 + \frac{5}{4}k^3 + \frac{1}{4}k^2 - \frac{7}{4}k + \frac{3}{4}$$

n **ungerade,** k **gerade:**

$$A_k(n) = \frac{1}{16}n^4 - (\frac{1}{4}k - \frac{1}{4})n^3 + (\frac{1}{8}k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{3}{4})n^2 + (\frac{1}{2}k^3 - \frac{5}{8}k^2 - \frac{3}{2}k + \frac{5}{4})n - \frac{1}{2}k^4 + \frac{5}{4}k^3 + \frac{1}{4}k^2 - \frac{7}{4}k + \frac{11}{16}$$

n **ungerade,** k **ungerade:**

$$A_k(n) = \frac{1}{16}n^4 - (\frac{1}{4}k - \frac{1}{4})n^3 + (\frac{1}{8}k^2 - \frac{1}{2}k + \frac{7}{8})n^2 + (\frac{1}{2}k^3 - \frac{5}{8}k^2 - 2k + \frac{13}{8})n - \frac{1}{2}k^4 + \frac{5}{4}k^3 + \frac{3}{4}k^2 - \frac{5}{2}k + \frac{15}{16}$$

3.8 Verschiedene Farben

Kehren wir zu unserer ursprünglichen Idee zurück, dass wir Gemälde im Stile Mondrians erzeugen wollen. Bislang waren unsere kleinen Quadrate farblos; Mondrian hat zumindest die Elementarfarben blau, gelb und rot verwendet.[12]
Wir gehen nun einfach davon aus, dass uns m verschiedene Farben zur Verfügung stehen — und wer möchte, kann die Möglichkeit, kleine Quadrate frei zu lassen, als eine der Farben, nämlich weiß, interpretieren. Wie viele verschiedene Bilder gibt es dann? Das klärt der

Satz:

Es gibt, wenn die beiden kleinen Quadrate in m Farben eingefärbt werden können, genau

$$m \cdot A_k(n) + m(m-1) \cdot (a_n(k) - B_n(k)) + \frac{1}{2}m(m-1)B_n(k)$$

Möglichkeiten, dabei ist $B_k(n) =$

1. $= (\frac{n}{2} - \frac{k}{2} + 1)^2 + \sum_{i=1}^{n-2k+1} i + \frac{1}{4}(\frac{1}{2}n^2 - (k+1)n + 4 * k - 4) = \frac{7}{8}n^2 - (\frac{11}{4}k - \frac{9}{4})n + \frac{9}{4}k^2 - 3k + 1$, falls n und k gerade sind;
2. $= (\frac{n}{2} - k + 1)(\frac{n}{2} - \frac{k}{s} + \frac{1}{2}) + \sum_{i=1}^{n-2k+1} i + \frac{1}{4}(\frac{1}{2}n^2 - (k-2)n + 2k - 2)$, falls n gerade und k gerade ist;
3. $= (\frac{n-1}{2} - k + 1)(\frac{n-1}{2} - \frac{k}{2} + 1) + \sum_{i=1}^{n-2k+1} i + \frac{1}{4}(\frac{1}{2}n^2 - (k-2)n + k - \frac{1}{2})$, falls n ungerade und k gerade ist;
4. $= (\frac{n-1}{2} - k + 1)(\frac{n}{2} - \frac{k}{2} + 1) + \sum_{i=1}^{n-2k+1} i + \frac{1}{4}(\frac{1}{2}n^2 - (k+1)n + 3k - \frac{3}{2})$, falls n und k ungerade sind.

Beweis:

Verwendet man nur eine Farbe, braucht man nur diese Farbe zu wählen, wofür man m Möglichkeiten hat. Komplizierter ist die Situation, wenn man zwei verschiedene Farben verwendet, man muss unterscheiden, ob bei gleicher Farbenwahl, aber vertauschter Implementation geometrisch verschiedene Elemente entstehen, für diese hat man jeweils $m(m-1)$ Möglichkeiten, oder geometrisch das gleiche Element, dann hat man nur die reine Wahl der Farbenmenge, also nur $\binom{m}{2}$ Möglichkeiten.
Wann kann ein Quadrat-Element mit zwei verschiedenen Farben geometrisch gleich zu einem sein, bei dem die Farben anders herum verteilt sind? Dazu müssen die beiden $k \times k$-Quadrate vermittels einer der Symmetrien des großen Quadrats gegeneinander ausgetauscht werden, dafür kommen nur die Abbildungen in Frage, die bei zweifacher Anwendung die Identität ergeben, und die beiden $k \times k$-Quadrate müssen ein Bild-Urbild-Paar unter dieser Abbildung sein, wobei wir regelmäßig auf die zuvor gemachten Untersuchungen zurückgreifen können, das (nicht ganz triviale) Problem wird lediglich sein, Doppelzählungen zu vermeiden.
Wir haben nicht weniger als fünf solche Abbildungen zu betrachten: die vier Achsenspiegelungen und die 180^o-Drehung (Punktspiegelung). Und leider werden wir um die eine oder andere Fallunterscheidung nicht herumkommen.

s_V

[12] Der Autor gestattet sich an dieser Stelle eine persönliche Bemerkung: Dieses Unterkapitel ist gewiss das mathematisch am wenigsten ergiebige. Der Autor hat es in der letzten Woche seines Urlaubsaufenthalts in Südtirol bearbeitet und spekuliert, dass die Antwort ganz simpel sein könnte, bis ihm aufging, dass auch verschiedene Färbungen geometrisch äquivalent sein können, wenn die farbigen Quadrate von einer Symmetrie des ungefärbten Quadrats ausgetauscht werden. Und noch unangenehmer: Das kann so sein, muss es aber nicht. Da es sich eigentlich um eine Urlaubswoche handelte, war die Motivation, all diese einzelnen Fälle auch in einer Rechnersimulation zu überprüfen, sagen wir: überschaubar. Mit anderen Worten: Der Autor hat dieses Unterkapitel nach bestem Wissen und Denken behandelt, sollte er sich aber irgendwo in einem der vielen Sonderfälle verheddert haben, wäre das eventuell nicht aufgefallen. Falls der/die geneigte Leser/in so etwas entdeckt, möge er/sie es dem Autor mitteilen, damit er den Fehler korrigieren kann. (Ab August 25 hat er ja reichlich Zeit dafür...)
Bleibt die Frage, warum man das Kapitel dann nicht einfach weglässt. Nun, dann wäre der Aufhänger an Mondrians Werk, der eben ganz klar auf die Farbe *nicht* verzichtet hat, doch eher der berühmte Siemens-Lufthaken...

n **gerade,** k **gerade:**

Nach dem zuvor Herausgefundenen gibt es $(\frac{n}{2} - k + 1)(n - k + 1)$ solche Elemente, die aber leider nicht alle geometrisch verschieden sind. Wir können ja beliebig ein $k \times k$-Quadrat links der vertikalen Symmetrieachse wählen — das ergab die obige Zahl, aber die Spiegelung an der horizontalen Achse (oder wahlweise auch die Punktspiegelung) macht verschiedene Elemente geometrisch gleich, um diesen Effekt zu vermeiden, dürfen wir die y-Koordinate nur von $0 \ldots \frac{n}{2} - \frac{k}{2}$ rangieren lassen, sodass $(\frac{n}{2} - \frac{k}{2} + 1)^2$ geometrisch verschiedene Möglichkeiten bleiben.

n **gerade,** k **ungerade:**

In x-Richtung gilt hier das gleiche wie zuvor, in y-Richtung muss das Quadrat zu mehr als der Hälfte (die exakte Hälfte hätte keine ganzen Koordinaten) unter der horizontalen Achse liegen, die y-Koordinate kann also nur von $0 \ldots \frac{n}{2} - \frac{k}{2} - \frac{1}{2}$ rangieren, und so haben wir $(\frac{n}{2} - k + 1)(\frac{n}{2} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2})$ geometrisch verschiedene Elemente.

n **ungerade,** k **gerade:**

In x-Richtung können x wir von $0 \ldots \frac{n-1}{2} - k$ wählen, in y-Richtung y von $0 \ldots \frac{n-1}{2} - \frac{k}{2}$, ergibt $(\frac{n-1}{2} - k + 1)(\frac{n-1}{2} - \frac{k}{2} + 1)$ geometrisch verschiedene Elemente.

n **ungerade,** k **ungerade:**

In x-Richtung können wir x von $0 \ldots \frac{n-1}{2} - k$ wählen, in y-Richtung y von $0 \ldots \frac{n}{2} - \frac{k}{2}$, ergibt $(\frac{n-1}{2} - k + 1)(\frac{n}{2} - \frac{k}{2} + 1)$ geometrisch verschiedene Elemente.

s_H

Für s_H sind keine *neuen* geometrisch verschiedenen Elemente zu betrachten. Denn jedes oben gezählte Element, das ein Bild-Urbild-Paar unter s_V darstellt, ist via der 90^o-Drehung zu einem geometrisch äquivalent, das ein Bild-Urbild-Paar unter s_H darstellt und vice versa. Wir haben alle diese Elemente also schon im letzten Abschnitt gezählt.

s_{Hd}

Die Anzahl der Bild-Urbild-Paare bezüglich s_{Hd} war nach dem schon Gesagten nicht vom Zweierrest von n oder k abhängig, sondern es gibt stets $\sum_{i=1}^{n-2k+1} i$ solcher Elemente, die aufgrund der Lage der beiden Quadrate zu den Eckpunkten auch sicher geometrisch verschieden sind. Wir müssen aber noch untersuchen, ob wir sie womöglich schon gezählt haben. Dazu müsste ein solches Element sowohl bezüglich s_{Hd} und s_V (analoge Argumentation für s_H) ein Bild-Urbild-Paar sein. Bildet man es hintereinander mit beiden Abbildungen ab, müsste es dabei also festbleiben. Aber die Hintereinanderausführung dieser Spiegelungen liefert, je nach Reihenfolge, die 90^o- oder die 270^o-Drehung; von denen wir aber wissen, dass sie keine Elemente stabilisieren können. Somit ist es unmöglich, dass wir eines dieser Elemente schon gezählt haben.

s_{Nd}

Diese Elemente können wir wiederum ignorieren, da sie alle geometrisch äquivalent zu den Elementen aus dem letzten Abschnitt sind, das zeigt wieder die 90^o-Drehung, die sie ineinander überführt.

d_{180^o}

Dies ist der komplexeste Fall. Einerseits sind hier alle Elemente, die wir zuvor gezählt haben, Bild-Urbild-Paare. Andererseits sind aber alle, die in vertikaler oder horizontaler Richtung mittig liegen, bereits subtrahiert worden, genauso jene, die von einer Diagonalen geteilt werden und zur anderen symmetrisch liegen. Und von dem, was dann übrig bleibt, sind jeweils 4 Elemente geometrisch gleich (wir haben nämlich diejenigen subtrahieren müssen, die einen größeren Stabilisator haben), sodass wir noch durch 4 teilen müssen. Vor der Division erhalten wir nach dem weiter oben Ausgeführten also genau die Zahl $g1$, sodass wir in jedem Fall von den geometrisch verschiedenen Elementen $\frac{g1}{4}$ erhalten. (Das enthält natürlich eine Fallunterscheidung, die wir wegen unserer geschickten Überlegung aber erst beim Resultat durchführen müssen).

Wir kommen nun zur Berechnung der Gesamtzahl geometrisch verschiedener Elemente bei m möglichen Farben. Wir haben bereits überlegt, dass sich die Anzahl der Möglichkeiten bei nur einer verwendeten Farbe ver-k-facht, während es bei zwei verwendeten Farben die Möglichkeit gibt, dass die unterschiedliche Verteilung der Farben

geometrisch äquivalente Elemente liefert — für deren Anzahl muss man die obigen Werte jeweils addieren — und die Anzahl mit $\binom{m}{2}$ multiplizieren, bei den restlichen Elementen liefert das Austauschen der Farben geometrisch verschiedene Elemente, diese Anzahl muss also mit $m(m-1)$ multipliziert werden.
Nun zur Fallunterscheidung:

n **gerade,** k **gerade:**
Es sind

$$B_n(k) = (\frac{n}{2} - \frac{k}{2} + 1)^2 + \sum_{i=1}^{n-2k+1} i + \frac{1}{4}(\frac{1}{2}n^2 - (k+1)n + 4 * k - 4) = \frac{7}{8}n^2 - (\frac{11}{4}k - \frac{9}{4})n + \frac{9}{4}k^2 - 3k + 1$$

Elemente mit äquivalenten Färbungen mit 2 Farben. Also erhalten wir insgesamt

$$m \cdot A_k(n) + m(m-1) \cdot (a_n(k) - B_n(k)) + \frac{1}{2}m(m-1)B_n(k) \qquad (*)$$

verschiedene gefärbte Elemente möglich.
Das obige Polynom in drei Variablen auszumultiplizieren und irgendwie zu 'vereinfachen', erscheint nicht angebracht.

Wir werden im Folgenden nur noch den Term $B_n(k)$ neu berechnen; die Formel $(*)$ ändert sich ja nicht, und wir vereinfachen sie ohnedies nicht.

n **gerade,** k **ungerade:** In diesem Fall gilt nach dem zuvor Gesagten:

$$B_n(k) = (\frac{n}{2} - k + 1)(\frac{n}{2} - \frac{k}{s} + \frac{1}{2}) + \sum_{i=1}^{n-2k+1} i + \frac{1}{4}(\frac{1}{2}n^2 - (k-2)n + 2k - 2)$$

n **ungerade,** k **gerade:** Hier haben wir:

$$B_n(k) = (\frac{n-1}{2} - k + 1)(\frac{n-1}{2} - \frac{k}{2} + 1) + \sum_{i=1}^{n-2k+1} i + \frac{1}{4}(\frac{1}{2}n^2 - (k-2)n + k - \frac{1}{2})$$

n **ungerade,** k **ungerade:** Hier ergibt sich:

$$B_n(k) = (\frac{n-1}{2} - k + 1)(\frac{n}{2} - \frac{k}{2} + 1) + \sum_{i=1}^{n-2k+1} i + \frac{1}{4}(\frac{1}{2}n^2 - (k+1)n + 3k - \frac{3}{2})$$

4 3 2×2-Quadrate

Wir wollen unsere Ansprüche in diesem abschließenden Kapitel äußerst bescheiden halten: Wir werden nur kleine Quadrate der Größe 2×2 zulassen und wir werden nur nach der Anzahl an physisch verschiedenen Möglichkeiten fragen. Der Autor geht davon aus, dass sich die Methoden der vorangehenden Abschnitte auch hier auf die Frage nach den geometrisch verschiedenen Elementen anwenden lassen — obwohl der Autor sich nicht wirklich davon überzeugt hat, dass evtl. auftretende 'technische' Schwierigkeiten de facto immer leicht zu überwinden sind —, ebenso wie anzunehmen ist, dass das hier vorgeschlagene Vorgehen auch für größere (aus einem bestimmten Grund aber sicherheitshalber nur für konkrete) k durchführbar ist. Auch wenn wir hier jetzt ein völlig anderes Vorgehen für das Abzählen der physisch verschiedenen Elemente vorschlagen als im vorangegangenen Abschnitt, soll damit nicht sicher gesagt sein, dass auf diesem Wege das nun folgende Resultat nicht zu erzielen ist, sondern lediglich, dass der Autor vor den immensen technischen Problemen der nötigen Fallunterscheidungen bei gesperrten Feldern kapituliert hat — vielleicht ja zu Unrecht — und einen gänzlich anderen Weg eingeschlagen hat, der sich aber auch als so steinig erwiesen hat, dass seine bis ins Letzte korrekte Ausführung sowohl den zur Verfügung stehenden Raum als auch die zur Verfügung stehende Zeit gesprengt hätte. Wer immer sich berufen fühlt, hier weiter zu gehen: Nur zu.

Schließlich schicken wir dem Ganzen noch ein Resultat aus der allgemeinen Kombinatorik voraus:

Definition:

Unter einer geordneten Partition der Zahl n mit höchstens k Summanden verstehen wir eine Summe aus nichtnegativen ganzen Zahlen, die n ergibt, genau k Summanden hat, unter denen die Zahl 0 (auch mehrfach) vorkommen darf und bei denen Summen mit den gleichen Summanden in anderer Reihenfolge als verschieden betrachtet werden.

Lemma:

Es gibt genau $\binom{n+k-1}{k-1}$ verschiedene geordnete Partitionen der Zahl n mit genau k Summanden.

Beweis:

Zu jeder geordneten Partition $a : 1 + a_2 + \cdots + a_k = n$ definieren wir die Folge der Zwischensummen $a_1,\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots$. Das letzte Glied dieser Folge ist stets die Zahl n und die Folge ist monoton steigend.

Nun ziehen wir aus der Menge der Zahlen $0,\ 1,\ \ldots, n$, also aus $n + 1$ Elementen, $k - 1$-mal ohne Reihenfolge und mit Zurücklegen. Nach den bekannten Sätzen der Kombinatorik gibt es dann genau $\binom{n+1+k-1-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{k-1}$ verschiedene Resultate.

Wir müssen nun nur noch zeigen, dass die drei vorgestellten Mengen, die der geordneten Partitionen, die der monoton steigenden 'Folgen' mit Endwert n und die Ergebnisse der Ziehung gleich mächtig sind.

Wie man aus einer geordneten Partition eine Folge erzeugt, haben wir schon ausgeführt. Wenn wir andererseits eine monoton steigende Folge $x_1, \ldots, x_k$ haben, so ist $x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_k - x_{k-1})$ ganz offensichtlich eine geordnete Partition der Zahl n, denn die Teleskopsumme hat $x_k = n$ als Resultat, und wegen der Monotoniebedingung sind alle Summanden nichtnegativ. Wenn man die beiden Verfahren hintereinander schaltet, z.B. mit einer geordneten Partition beginnt, so landet man trivialerweise wieder bei der gleichen geordneten Partition, genauso bei einer Folge beginnend erhält man aus rein arithemtischen Gründen die gleiche Folge. Somit sind die beiden Mengen durch zwei Bijektionen verbunden, haben also gleich viele Elemente.

Um die Gleichmächtigkeit der Menge der Folgen und der Menge der Ziehungen einzusehen, müssen wir eigentlich nur darauf achten, dass wir ohne Reihenfolge gezogen haben, uns also die Reihenfolge selbst heraussuchen dürfen. Und wir wählen selbstverständlich die Reihenfolge so, dass die gezogenen Zahlen monoton steigend angeordnet sind. Dann ist es sofort offensichtlich, dass zu jeder Ziehung genau eine solche Folge gehört und vice versa, dass also auch diese beiden Mengen gleich viele Element haben. ∎

Kommen wir nun zu dem angekündigten Resultat:

Satz:

Es gibt genau

$$C_2(n) = \frac{1}{6}n^6 - n^5 - 2n^4 + \frac{62}{3}n^3 - \frac{73}{6}n^2 - \frac{305}{3}n + 140$$

Möglichkeiten, drei 2×2-Quadrate so in einem $n \times n$-Quadrat zu platzieren, dass sie achsparallel sind, ganze Eckkoordinaten haben und sich nicht gegenseitig durchdringen.

Bemerkung:

Die Skizzenhaftigkeit des nachstehenden Beweises besteht hauptsächlich aus drei Faktoren: 1. Nicht alle Rechnungen wurden explizit durchgeführt (jedenfalls nicht ohne Rechnerhilfe), 2. die Induktionsverankerung wurde, wegen der notwendigen Größe von n ebenfalls an den Rechner delegiert (das zu vermeiden dürfte der sauerste Schritt werden, da man entweder konkret ein großes Beispiel beackern muss oder man wird in unten stehendem Beweis genau nachrechnen müssen, was in den Fällen geschieht, in denen es für kleine n die angesprochenen Konstellationen gar nicht gibt) und 3. werden geometrische Argumente nie weggelassen, aber manchmal sehr hoppla-hopp geäußert. Man dürfte aber keine Probleme haben, aus dem Nachstehenden einen vollständigen Beweis zu machen.

Beweisskizze: Wir führen den Beweis per Induktion nach n. Da wir aber jeweils von n auf $n + 2$ übergehen werden, benötigen wir zwei Induktionsverankerungen, eine für eine gerade, die andere für eine ungerade Zahl. Diese beschaffen wir uns aus dem Rechner, da ein direktes Abzählen für $n = 4$ gut und für $n = 5$

gerade noch leistbar ist, wir aber zumindest $n = 10$ und $n = 11$ benötigen, da sonst unser Induktionsschritt klemmt.
Im Induktionsschritt überlegen wir folgendes: Wir teilen die zu zählenden Elemente in zwei große Teile auf: zum einen die Elemente, die (mindestens) ein 2×2-Quadrat enthalten, das am Rand des $n+2 \times n+2$-Quadrates liegt, und in die Elemente, die kein 2×2-Quadrat enthalten, das am Rande liegt. Alle diese Möglichkeiten passen dann in das von jedem Rand her um 1 LE eingeschränkte 'Innenquadrat', das ein Quadrat der Größe $n \times n$ ist; die Anzahl der dafür möglichen Elemente ist genau die in der Induktionsvoraussetzung gegebene Zahl. Wir müssen also 'nur noch' zählen, wie viele Möglichkeiten es für Elemente mit mindestens einem kleinen Randquadrat es gibt. Dazu veranstalten wir eine Fallunterscheidung mit einer ganzen Sequenz von Fällen:

Fall 1: 3 Quadrate in Ecklage:
Der simpelste Fall. Es gibt offensichtlich genau 4 mögliche Elemente.

Fall 2: 2 Quadrate in Ecklage, 1 Quadrat in Rand- nicht aber Ecklage:
Für die Wahl der beiden Quadrate haben wir offensichtlich 6 $(= \binom{4}{2})$ Möglichkeiten, für das weitere Randquadrat haben wir prinzipiell $4(n-1)$ Möglichkeiten, von denen aber die 4 Positionen zu subtrahieren sind, in denen das dritte Quadrat eines der beiden Eckquadrate überlappen würde, sodass sich hier $6 \cdot 4(n-2)$ verschiedene Elemente ergeben.

Fall 3: 2 Quadrate in Ecklage, 1 Quadrat im Inneren:
Für die beiden Eckquadrate haben wir wiederum 6 Möglichkeiten. Für ein inneres Quadrat kann die x-Koordinate des LUP von $1 \ldots n-1$ rangieren, genauso die y-Koordinate, somit gibt es prinzipiell $(n-1)^2$ mögliche Koordinaten. In genau zwei Fällen überlappt das innere Quadrat aber mit einem der beiden Eckquadrate, sodass wir insgesamt $6 \cdot ((n-1)^2 - 2)$ Möglichkeiten haben.

Fall 4: 1 Quadrat in Ecklage, 2 Quadrate in Randlage:
Hier bietet es sich an, weiter die Fälle zu unterscheiden:

Fall 4a: Alle 3 Quadrate liegen auf einer Seite des großen Quadrats:
In diesem Fall müssen wir drei Quadrate von 0 bis $n-1$ so platzieren, dass das erste am Eck, also in der Position $n = 0$ befindlich ist, die beiden anderen dürfen sich lediglich nicht überlappen, und das dritte darf nicht wieder ein Eckquadrat werden. Wir betrachten nun die Abstände zwischen Q_1, dem Eckquadrat, und dem ihm nächstliegenden, Q_2, den von Q_2 und Q_3 und schließlich den von Q_3 zur letztmöglichen Position, in der sich ein Quadrat befinden dürfte, um nicht ein Eckquadrat zu sein. Die überbrückt zusammen mit den Quadraten die Strecke von 0 bis $n+1$ (dort ist der mögliche OP des dritten Quadrats), also $n+1$ LE, von denen 6 zu subtrahieren sind für die Längen der Quadrate, die ja a priori wegzudenken sind. Jeder dieser Abstände kann 0 sein, nämlich dann, wenn Q_1 das Quadrat Q_2 berührt, oder Q_2 das Quadrat Q_3 berührt, oder wenn Q_3 sich schon in Maximalposition befindet. Damit ist klar, dass zu jeder solchen Positionierung der Quadrate eindeutig eine geordnete Partition von $n-5$ mit 3 Summanden gehört, es also $\binom{n-3}{2}$ Möglichkeiten gibt.
Das müssen wir noch mit 8 multiplizieren, weil das große Quadrat ja jeweils 4 unterschiedliche Seiten besitzt und an jeder Seite 2 verschiedene Eckquadrate, wir erhalten also $8 \cdot \binom{n-3}{2}$ Möglichkeiten.

Fall 4b: Alle Nicht-Eckquad. liegt auf versch. an das Eckquad. grenzenden Seiten:
Dieser Fall ist wieder etwas einfacher: Es gibt 4 Möglichkeiten für das Eckquadrat. Sodann gibt es für jedes der beiden anderen Quadrate auf einer der beiden an das Eckquadrat angrenzenden Seiten die Möglichkeit, die Positionen 2 bis $n-1$ zu besetzen, das sind jeweils $n-2$ Möglichkeiten. Somit ergeben sich insgesamt $4 \times (n-2)^2$ Möglichkeiten.

Fall 4c: Genau ein Randquadr. liegt auf einer an das Eckquadr. angrenzenden Seite:
Hier haben wir es mit drei wohlunterschiedenen Positionen zu tun, wir können also wiederum die einzelnen Möglichkeiten multiplizieren. Für das Eckquadrat gibt es vier Möglichkeiten, für das Quadrat auf einer der angrenzenden Seiten gibt es jeweils Positionen von 2 bis $n-1$, also $n-2$ Möglichkeiten; da es zwei solche Seiten gibt also $2(n-2)$ Möglichkeiten. Und für das

Quadrat auf einer nicht angrenzenden Seite kann die Position von 1 bis $n-1$ rangieren, es gibt also (Argument wie vorhin) $2(n-1)$ Möglichkeiten. Freilich müssen wir davon die beiden Fälle subtrahieren, in denen das zweite und das dritte Quadrat in Nebenecklage sich überlappen, wir haben also $4(n-2)(n-1)-2 = 4n^2-12n+6$ Möglichkeiten per gewähltem Eckquadrat. Das ergibt insgesamt $4(4n^2-12n+6) = 16n^2-48n+24$ Möglichkeiten.

Fall 4d: Die beiden Randquadrate liegen auf der gleichen nicht angrenzenden Seite:
Zunächst gibt es wieder 4 mögliche Eckquadrate und 2 mögliche Seiten. Die beiden Quadrate können auf dieser Seite in den Positionen von 1 bis $n-1$ platziert werden, die zu überwindende Strecke beträgt also n LE, minus 2 Quadrate, also haben die Lücken die Länge $n-4$ ansonsten gelten die Überlegungen von Fall 4a; deshalb gibt es, wenn die Seite gewählt ist $\binom{n-2}{2}$ Möglichkeiten für die beiden Quadrate. Somit ergeben sich insgesamt $8 \cdot \binom{n-2}{2}$ Möglichkeiten.

Fall 4e: Die beiden Randquadrate liegen auf verschiedenen nicht angrenzenden Seiten:
Für das Eckquadrat gibt es 4 Möglichkeiten. Eine weitere Seitenwahl ist obsolet, es müssen beide in Frage kommenden Seiten verwendet werden. Dort kann das zu platzierende Quadrat jeweils die Positionen 1 bis $n-1$ besetzen, also $n-1$ verschiedene, für beide $(n-1)^2$ Möglichkeiten, abzüglich des einen Falles, wo beide an der 'falschen' Seite in Nebenecklage sind und sich durchdringen. Somit haben wir insgesamt $4((n-1)^2-1) = 4n^2-8n$ verschiedene Möglichkeiten.

Fall 5: Ein Eckquadrat, ein Randquadrat, ein inneres Quadrat:
Hier besteht das Problem hauptsächlich darin, sich zu überlegen, wie viele innere Quadrate von der jeweiligen Wahl des Randquadrates ausgeschlossen werden. Hier gibt es drei relevante Fälle:

Fall 5a: Das Randquadrat berührt das Eckquadrat:
Selbstverständlich gibt es wieder 4 Möglichkeiten für das Eckquadrat, für das an dieses angrenzende Randquadrat gibt es dann genau 2 Möglichkeiten. Durch diese Konstellation sind, wie man sich leicht überzeugt, genau 3 der inneren Quadrate, von denen es $(n-1)^2$ gibt, wegen Überlappung unmöglich, somit haben wir $4 \cdot 2 \cdot ((n-1)^2-3)$ Möglichkeiten.

Fall 5b: Das Randquadrat ist eine Position von der Eckposition entfernt:
Auch hier sind insgesamt nur 3 innere Quadrate gesperrt. Für das Eckquadrat gibt es 4 Möglichkeiten. Von den insgesamt 8 Positionen für ein Randquadrat, 1 von der Eckposition entfernt zu sein, blockiert das Eckquadrat 2, sodass 6 verbleiben. Somit haben wir $4 \cdot 6 \cdot ((n-1)^2-3)$ Möglichkeiten.

Fall 5c: Randquadr. berührt Eckquadr. nicht und ist nicht 1 von Eckposition entfernt:
Ein 'frei' liegendes Randquadrat sperrt 3 innere Quadrate, das Eckquadrat zusätzlich eines, sodass insgesamt $(n-1)^2-4$ verbleiben. Für das Eckquadrat gibt es wie gehabt 4 Möglichkeiten. Für ein Randquadrat, das kein Eckquadrat ist, prinzipiell auf jeder Seite $n-1$ Möglichkeiten, zusammen also $4(n-1)$ Möglichkeiten. 8 davon sind 1 von der Randposition entfernt — unter diesen 8 befinden sich auch die beiden, die das Eckquadrat überlappen —, und zwei weitere berühren das Eckquadrat, sind also gleichfalls aus diesem Fall auszuschließen. Somit verbleiben $4(n-1)-10 = 4n-14$ Möglichkeiten.
Insgesamt haben wir also $4 \cdot (4n-14) \cdot ((n-1)^2-4)$ Möglichkeiten.

Fall 6: Ein Eckquadrat und zwei innere Quadrate:
Für die Platzierung der inneren Quadrate haben wir genau $A_2(n)$ Möglichkeiten, wovon wir allerdings noch diejenigen zu subtrahieren haben, bei denen eines der beiden Quadrate das Eckquadrat überlappen würde. Da wir in $A_2(n)$ alle Doppelten schon entfernt haben, können wir o.B.d.A. davon ausgehen, dass das erste der beiden 2×2-Quadrate dasjenige ist, das das Eckquadrat überlappt, und für innere Quadrate gibt es nur je eine einzige Position, die das erfüllt (sitzt das Eckquadrat bei $(0|0)$, dann muss das innere Quadrat bei $(1|1)$ sitzen). Wir müssen uns nur noch überlegen, wie viele 'zweite' kleine Quadrate im inneren $n \times n$-Quadrat noch möglich sind. In diesem ist das 'erste' Quadrat ein Eckquadrat, das genau 4 Positionen sperrt, es verbleiben für das 2. Quadrat also $(n-1)^2-4$ Möglichkeiten. Somit haben wir 4 mögliche Eckquadrate, und für jedes $A_2(n)-((n-1)^2-4)$ Möglichkeiten, insgesamt also $4(A_2(n)-((n-1)^2-4))$ Möglichkeiten.

Fall 7: Drei Randquadrate:

Auch diesen Fall gehen wir mit einer Sequenz weiterer Fallunterscheidungen an:

Fall 7a: Alle 3 Randquadrate liegen auf einer Seite des großen Quadrats:

Wählen wir zunächst eine Seite fest aus. Dann können die drei Quadrate Positionen von 1 bis $n-1$ belegen, als Strecke hat das die Länge n (bis zum oberen Rand), davon gehen 6 LE ab, die die Quadrate einnehmen, die Gesamtzwischenräume betragen also $n-6$. Die folgenden Abstände: der zwischen Position 1 und der Position von Q_1, der von Q_1 zu Q_2, der von Q_2 zu Q_3 und schließlich der vom oberen Rand von Q_3 zur Position $n-1$ (oberer Rand) sind also eine geordnete Partition der Zahl $n-6$ aus 4 Summanden, die offensichtlich zu den möglichen Verteilungen der 3 Quadrate in Bijektion stehen, und es gibt nach dem Lemma $\binom{n-6+4-1}{4-1} = \binom{n-3}{3}$ Möglichkeiten dafür.

Es gibt 4 Seiten, also lautet die Gesamtzahl der Möglichkeiten $4 \cdot \binom{n-3}{3}$.

Fall 7b: Zwei Randquadrate liegen auf einer Seite, das dritte auf einer anderen:

Dieser Fall ist etwas heikler als der vorherige. Es ist klar, dass die Seite, die die zwei Quadrate enthält, ausgezeichnet ist, sodass es für sie 4 Möglichkeiten gibt. Die beiden Quadrate können dann von Position 1 bis Position $n-1$ platziert werden, sodass für eventuelle Zwischenräume $n-6$ LE verbleiben. Wir definieren wieder den Abstand von Position 1 zu Q_1, den Abstand von Q_1 zu Q_2 und den Abstand vom 'Ende' von Q_2 zur Position $n-1$ als die drei Summanden einer geordneten Partition von $n-6$, dafür gibt es nach dem Lemma $\binom{n-5+3-1}{3-1} = \binom{n-3}{2}$ Möglichkeiten. Das dritte Quadrat kann sich prinzipiell auf den restlichen 3 Seiten in der Position 1 bis $n-1$ befinden, hat also prinzipiell $3(n-1) = 3n-3$ Möglichkeiten. Das stimmt aber nur dann, wenn keines der beiden anderen Quadrate 1 von einer Eckposition entfernt, falls das doch so ist, sperrt das Quadrat, das sich in 'Nebeneckposition' befindet, eine der möglichen Positionen für das dritte Quadrat.

Wenn sich also beide ersten Quadrate in Nebeneckposition befinden, was nur einmal vorkommt, hat das dritte Quadrat nur $3(n-1)-2 = 3n-5$ Möglichkeiten.

Befindet sich genau eines der beiden ersten Quadrate in Nebeneckposition, hat das dritte Quadrat $3n-4$ Möglichkeiten. Wie oft geschieht das? Das Nebeneckquadrat kann an beiden 'Enden' der Seite liegen, nehmen wir an, es wäre in Position 1. Dann bleiben für das zweite Quadrat die Positionen 3 bis $n-2$ (das andere Quadrat darf ja nicht auch Nebenecklage haben), also $n-4$ mögliche Lagen, somit gibt es $2n-8$ solcher Fälle.

Befindet sich keines der beiden Quadrate in Nebenecklage, variiert ihre Position von 2 bis $n-2$, die zu überbrückende Strecke ist also $n-2$. Davon werden 2 Quadrate der Länge 2 subtrahiert, ergibt $n-6$. Damit ergeben sich wie im Lemma $\binom{n-6+3-1}{3-1} = \binom{n-4}{2}$ Möglichkeiten für die beiden Quadrate auf der gleichen Seite. Das dritte Quadrat auf einer anderen Seite wird von ihnen nicht behindert, es hat also die vollen $3n-3$ Möglichkeiten. Das ergibt in der Summe $3n-5+(2n-8)(3n-4)+\binom{n-4}{2}\cdot(3n-3)$ Möglichkeiten. Da wir bislang die Seite mit den beiden Quadraten fixiert hatten, muss noch mit 4 für die Anzahl der Seiten multipliziert werden. Insgesamt haben wir dann $4\cdot(3n-5+(2n-8)(3n-4)+\binom{n-4}{2}\cdot(3n-3))$ Möglichkeiten in diesem Fall.

Fall 7c: Alle drei Quadrate liegen auf verschiedenen Seiten:

Hier taucht erneut das Problem auf, dass Quadrate in Nebeneckposition liegen können und dann eine Position auf dem anliegenden Rand sperren können, übrigens genau dann, wenn sich das andere Quadrat auch in Nebeneckposition befindet. Wir müssen also nur nach der Anzahl der Nebeneckquadrate parametrisieren:

Fall 7cI: Alle drei Quadrate sind in Nebeneckposition:

Notwendigerweise müssen sich nun zwei der Quadrate auf gegenüberliegenden Seiten befinden und eines muss auf einer Seite liegen, die an die beiden gegenüberliegenden angrenzt. Dieses wählen wir zuerst, und für seine Position haben wir 8 Möglichkeiten. Von den beiden anderen Seiten muss eine so liegen, dass das zuerst gewählte Quadrat dort eine Nebeneckposition sperrt, auf dieser Seite müssen wir die einzige noch mögliche Nebeneckposition wählen. Auf der anderen angrenzenden Seite haben wir dann 2 Möglichkeiten, macht insgesamt 16 Möglichkeiten (von denen keine doppelt vorkommt, weil alle drei Quadrate eindeutig gemacht worden sind).

Fall 7cII: Zwei Quadrate sind in Nebeneckposition, das dritte nicht:
Für das erste Nebeneckquadrat haben wir 8 Möglichkeiten, für das zweite 5, weil es nicht auf der gleichen Seite sein darf und sich nicht mit dem zuerst gewählten überlappen darf; nun haben wir aber jede Möglichkeit doppelt gezählt, mithin müssen wir noch durch 2 teilen. Für das dritte Quadrat, das nicht in Nebeneckposition liegt, kommen dann noch zwei Seiten in Frage, auf denen es jeweils $n-3$ mögliche Positionen gibt, keine kann mit einem der Nebeneckquadrate kollidieren, sodass wir insgesamt $\frac{8 \cdot 5}{2} \cdot 2(n-3) = 40(n-3)$ Möglichkeiten.

Fall 7cIII: Ein Quadrat befindet sich in Nebeneckposition, die anderen nicht:
Wir müssen hier vor allem darauf achten, dass die drei Quadrate auf verschiedenen Seiten liegen müssen. Für das Nebeneckquadrat gibt es wie gehabt 8 Möglichkeiten. Das erste Innenrandquadrat muss auf einer anderen Seite liegen, also gibt es für dieses $3(n-3)$ Möglichkeiten. Das zweite Innenrandquadrat muss dann auf einer der beiden verbliebenen Seiten liegen, dafür gibt es $2(n-3)$ Möglichkeiten. Aber selbstverständlich hat man dabei jede Wahl der Quadrate zwei und drei doppelt gezählt, also ist insgesamt noch durch 2 zu teilen, das ergibt dann insgesamt $24(n-3)^2$ Möglichkeiten.

Fall7cIV: Keines der Quadrate ist in Nebeneckposition:
In diesem Fall haben wir für das erste Quadrat 4 Seiten zur Auswahl, also $4(n-3)$ Möglichkeiten, für das zweite $3(n-3)$ Möglichkeiten und für das dritte, dem nur noch 2 Seiten verbleiben, $2(n-3)$ Möglichkeiten. Jede dieser Auswahlen kommt in 6 verschiedenen Reihenfolgen vor, also haben wir, nach Division durch 6, die Gesamtzahl von $4(n-3)^3$ Möglichkeiten.

Fall 8: 2 Randquadrate und ein inneres Quadrat:
Auch hier gehen wir stärker ins Detail:

Fall 8a: Die beiden Randquadrate befinden sich beide in Nebenecklage:
Für die beiden Nebeneckquadrate haben wir dann nach vorigen Überlegungen $\frac{8 \cdot 6}{2} = 24$ Möglichkeiten. Für das innere Quadrat gibt es prinzipiell $(n-1)^2$ Möglichkeiten, jedoch müssen wir Überlappungen vermeiden. Jedes der Nebeneckquadrate sperrt zwei mögliche Innenquadrate, also gibt es für dieses tatsächlich nur $(n-1)^2 - 4$ Möglichkeiten, insgesamt also $24((n-1)^2 - 4)$ Möglichkeiten.

Fall 8b: Eines der Randquadrate befindet sich in Nebenecklage, das andere nicht:
Für das nun eindeutige Quadrat in Nebenecklage gibt es 8 Möglichkeiten. Für das andere Randquadrat gibt es prinzipiell $4(n-3) = 4n-12$ Möglichkeiten, von denen aber eine ausfällt, weil sich auf genau einer Position die beiden Quadrate überlappen würden, bleiben $4n-13$. In genau zwei Positionen berühren sich das Nebeneckquadrat und das zweite Quadrat (einmal liegen sie nebeneinander, das andere Mal liegt das zweite Quadrat über Eck am Nebeneckquadrat an), in diesen Fällen sperren die beiden gemeinsam 4 innere Quadrate, in allen anderen Fällen sperren sie gemeinsam 5 Quadrate. Somit ergeben sich summa summarum $8 \cdot (2((n-1)^2 - 4) + (4n - 15)((n-1)^2 - 5))$ Möglichkeiten.

Fall 8c: Keines der Quadrate befindet sich in Nebenecklage:
Hier stellen wir fest, dass die beiden Randquadrate, wenn sie sich berühren oder wenn sie beide an dasselbe Eckquadrat grenzen (dafür gibt es genau 4 Situationen), insgesamt 5, in allen anderen Fällen insgesamt 6 Innenquadrate sperren, egal wie sie sonst liegen. Für das erste Quadrat haben wir $4(n-3) = 4n-12$ Möglichkeiten, für das zweite sind zwei Möglichkeiten gesperrt, falls das erste Quadrat zur Eckposition den Abstand 2 hat, ansonsten deren 3. Von Quadraten mit dem Abstand 2 zur Eckposition gibt es 8 verschiedene (hier wird wieder einmal verwendet, dass n nicht zu klein ist), somit haben wir für die beiden Quadrate zusammen $(8 \cdot (4n-14) + (4n-20)(4n-15))/2 = 4 \cdot (4n-14) + (2n-10)(4n-15) = 8n^2 - 54n + 94$ Möglichkeiten.
Wie viele inneren Quadrate gesperrt sind, hängt wiederum davon ab, ob die beiden Randquadrate sich berühren (5 Sperrungen) oder nicht (6 Sperrungen). Wir müssen uns also fragen, in wie vielen der obigen Fälle sich die beiden Randquadrate berühren. Dazu können wir uns vorstellen, dass wir

ein 4×2-Quadrat platzieren wollen. Das kann auf jeder Seite die Positionen 2 bis $n-4$ besetzen, hat also $n-5$ Möglichkeiten. Mal der Anzahl der Seiten gibt das $4n-20$. Dazu kommen dann die 4 Fälle 'übers Eck zum gleichen Eckquadrat', also $4n-16$ insgesamt. Folglich gibt es insgesamt $(4n-16)((n-1)^2-5)+(8n^2-58n+110)((n-1)^2-6)$ Möglichkeiten.

Fall 9: 1 Randquadrat und zwei innere Quadrate:
Für das Randquadrat, das ja kein Eckquadrat ist, gibt es $4(n-1)$ Möglichkeiten, und für zwei Innenquadrate $A_2(n)$ Möglichkeiten. Allerdings muss man diejenigen Möglichkeiten subtrahieren, bei denen eines der inneren Quadrate sich mit dem Randquadrat überlappt. Hier treten allerdings drei unterschiedliche Fälle auf:

Fall 9a: Das Randquadrat befindet sich in Nebenecklage:
In diesem Fall sperrt das Randquadrat genau zwei innere Quadrate, ein Eckquadrat und eines in Nebenecklage (bezogen auf das Innenquadrat), die für das jeweils zweite Innenquadrat 4 bzw. 6 Positionen sperren; wir haben also nur $A_2(n)-((n-1)^2-4)-((n-1)^2-6)=A_2(n)-2n^2+4n+8$ Möglichkeiten. Da es 8 Quadrate in Nebenecklage gibt, ergeben sich insgesamt $8\cdot(A_2(n)-2n^2+4n+8)$ Möglichkeiten.

Fall 9b: Das Randquadrat hat zur Ecklage den Abstand 2:
In diesem Fall sperrt das Randquadrat 3 innere Quadrate, ein Eck- und zwei Randquadrate des inneren großen Quadrats. Somit haben wir also $A_2(n)-((n-1)^2-4)-2((n-1)^2-6)=A_2(n)-3n^2+6n+13$ Möglichkeiten. Allerdings ist hier noch eine kleine Tücke verborgen: Von den drei gesperrten Innenquadraten passen zwei nebeneinander, diese Konstellation haben wir soeben zweimal subtrahiert (einmal für das innere Eckquadrat, einmal für das zwei daneben befindliche Innenquadrat), sodass wir eine Möglichkeit wieder addieren müssen, wir haben also $A_2(n)-3n^2+6n+14$ Möglichkeiten pro Randquadrat, von denen es wiederum 8 Stück gibt (wenn n genügend groß ist), sodass wir insgesamt $8\cdot(A_2(n)-3n^2+6n+14)$ Möglichkeiten erhalten.

Fall 9c: Das Randquadrat hat zur Ecklage einen größeren Abstand als 2:
Auch in diesem Fall sperrt das gewählte Randquadrat drei innere Randquadrate, von denen diesmal keines ein inneres Eckquadrat ist, sodass jedes 6 Positionen für das zweite Innenquadrat sperrt. Und wir haben wieder zu beachten, dass eine Konstellation (beide Innenrandquadrate, für die das möglich ist, wurden gewählt) doppelt subtrahiert wird, wir sie also nachträglich wieder addieren müssen. So erhalten wir $A_2(n)-3((n-1)^2-6)+1=A_2(n)-3n^2+6n+16$ Möglichkeiten. Und pro Seite gibt es $(n-5)$ Innenquadrate, die einen Abstand von mehr als 2 zum nächsten Eckquadrat haben, insgesamt als $4(n-5)$ Möglichkeiten. Dies liefert für diesen Fall die Anzahl von $4(n-5)(A_2(n)-3n^2+6n+16)$ Möglichkeiten.

Fall 10: 3 innere Quadrate:
Laut Induktionsvoraussetzung gibt es dafür genau $C_2(n)$ Möglichkeiten.

Nun müssen wir zu $C_2(n)$ all diese Werte addieren und zusehen, dass wir $C_2(n+2)$ erhalten, was, wie man leicht nachrechnet, tatsächlich der Fall ist. ∎

Bemerkung: So weit der Autor das abschätzen kann, ist kein Grund zu sehen, warum sich das Vorgehen der vergangenen Abschnitte betreffs der geometrisch verschiedenen Elemente nicht auch hier durchführen lassen sollte. Die Situation, nun drei 'kleine' Quadrate zu haben, verunmöglicht nach wie vor Symmetrien via der 90^o-Drehung (und damit auch via der gesamten Symmetriegruppe), die Symmetrien der Spiegelungen funktionieren dann entweder mit 3 physisch fest bleibenden kleinen Quadraten (wie man mit diesen dann auf der Achse aufgereihten Fällen umgeht, hat man oben gesehen) oder mit 1 physisch fest bleibenden Quadrat und einem Urbild-Bild-Paar (hier wird man sehr sorgfältig auf Durchdringungsfälle achten müssen!), es ist aber nicht einzusehen, warum sich das nicht zählen lassen soll. Allein der Aufwand wird erheblich sein. (Aber wie gesagt: Wer sich berufen fühlt...)